

\$SPAD/input schaum1.input

Timothy Daly

June 15, 2008

## Contents

1	[1]:14.59	$\int \frac{dx}{ax+b}$	3
2	[1]:14.60	$\int \frac{x dx}{ax+b}$	4
3	[1]:14.61	$\int \frac{x^2 dx}{ax+b}$	5
4	[1]:14.62	$\int \frac{x^3 dx}{ax+b}$	6
5	[1]:14.63	$\int \frac{dx}{x(ax+b)}$	8
6	[1]:14.64	$\int \frac{dx}{x^2(ax+b)}$	9
7	[1]:14.65	$\int \frac{dx}{x^3(ax+b)}$	11
8	[1]:14.66	$\int \frac{dx}{(ax+b)^2}$	13
9	[1]:14.67	$\int \frac{x dx}{(ax+b)^2}$	14
10	[1]:14.68	$\int \frac{x^2 dx}{(ax+b)^2}$	15
11	[1]:14.69	$\int \frac{x^3 dx}{(ax+b)^2}$	17
12	[1]:14.70	$\int \frac{dx}{x(ax+b)^2}$	18
13	[1]:14.71	$\int \frac{dx}{x^2(ax+b)^2}$	20
14	[1]:14.72	$\int \frac{dx}{x^3(ax+b)^2}$	22
15	[1]:14.73	$\int \frac{dx}{(ax+b)^3}$	24

16 [1]:14.74	$\int \frac{x \, dx}{(ax + b)^3}$	25
17 [1]:14.75	$\int \frac{x^2 \, dx}{(ax + b)^3}$	26
18 [1]:14.76	$\int \frac{x^3 \, dx}{(ax + b)^3}$	27
19 [1]:14.77	$\int \frac{dx}{x(ax + b)^3}$	28
20 [1]:14.78	$\int \frac{dx}{x^2(ax + b)^3}$	30
21 [1]:14.79	$\int \frac{dx}{x^3(ax + b)^3}$	32
22 [1]:14.80	$\int (ax + b)^n \, dx$	34
23 [1]:14.81	$\int x(ax + b)^n \, dx$	36
24 [1]:14.82	$\int x^2(ax + b)^n \, dx$	38
25 [1]:14.83	$\int x^m(ax + b)^n \, dx$	40

**1 [1]:14.59**      $\int \frac{dx}{ax + b}$

$$\int \frac{1}{ax + b} = \frac{1}{a} \ln(ax + b)$$

```

(*)≡
)spool schaum1.output
)set message test on
)set message auto off
)clear all

--S 1
aa:=integrate(1/(a*x+b),x)
--R
--R      log(a x + b)
--R (1)  -----
--R      a
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E 1

--S 2
bb:=1/a*log(a*x+b)
--R
--R      log(a x + b)
--R (2)  -----
--R      a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E 2

--S 3      14:59 Schaums and Axiom agree
cc:=bb-aa
--R
--R (3)  0
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E 3

```

**2 [1]:14.60**  $\int \frac{x dx}{ax + b}$

$$\int \frac{x}{ax + b} = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2} \ln(ax + b)$$

```
(*)+≡
)clear all
```

```
--S 4
aa:=integrate(x/(a*x+b),x)
--R
--R
--R      - b log(a x + b) + a x
--R (1) -----
--R              2
--R             a
```

Type: Union(Expression Integer,...)

```
--S 5
bb:=x/a-b/a^2*log(a*x+b)
--R
--R      - b log(a x + b) + a x
--R (2) -----
--R              2
--R             a
```

Type: Expression Integer

```
--S 6      14:60 Schaums and Axiom agree
cc:=bb-aa
--R
--R (3)  0
```

Type: Expression Integer

**3 [1]:14.61**  $\int \frac{x^2 dx}{ax + b}$

$$\int \frac{x^2}{ax + b} = \frac{(ax + b)^2}{2a^3} - \frac{2b(ax + b)}{a^3} + \frac{b^2}{a^3} \ln(ax + b)$$

```

(*)+=
)clear all

--S 7
aa:=integrate(x^2/(a*x+b),x)
--R
--R          2          2 2
--R      2b log(a x + b) + a x  - 2a b x
--R (1) -----
--R          3
--R         2a
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 8
bb:=(a*x+b)^2/(2*a^3)-(2*b*(a*x+b))/a^3+b^2/a^3*log(a*x+b)
--R
--R          2          2 2          2
--R      2b log(a x + b) + a x  - 2a b x - 3b
--R (2) -----
--R          3
--R         2a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 9
cc:=bb-aa
--R
--R          2
--R          3b
--R (3)  - ----
--R          3
--R         2a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

This factor is constant with respect to  $x$  as shown by taking the derivative.  
It is a constant of integration.

```

(*)+≡
--S 10      14:61 Schaums and Axiom differ by a constant
differentiate(cc,x)
--R
--R (4)  0
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

**4 [1]:14.62**  $\int \frac{x^3 dx}{ax + b}$

$$\int \frac{x^3}{ax + b} = \frac{(ax + b)^3}{3a^4} - \frac{3b(ax + b)^2}{2a^4} + \frac{3b^2(ax + b)}{a^4} - \frac{b^3}{a^4} \ln(ax + b)$$

```

(*)+≡
)clear all

--S 11
aa:=integrate(x^3/(a*x+b),x)
--R
--R          3          3 3      2 2      2
--R      - 6b log(a x + b) + 2a x  - 3a b x  + 6a b x
--R (1) -----
--R                               4
--R                             6a
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

```

and the book expression is:

```

(*)+≡
--S 12
bb:=(a*x+b)^3/(3*a^4)-(3*b*(a*x+b)^2)/(2*a^4)+(3*b^2*(a*x+b))/a^4-(b^3/a^4)*log(a*x+b)
--R
--R          3          3 3      2 2      2      3
--R      - 6b log(a x + b) + 2a x  - 3a b x  + 6a b x + 11b
--R (2) -----
--R                               4
--R                             6a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

The difference is a constant with respect to x:

```
(*)+≡
--S 13
cc:=aa-bb
--R
--R
--R          3
--R       11b
--R   (3)  - ----
--R          4
--R       6a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E
```

If we differentiate each expression we see that this is the integration constant.

```
(*)+≡
--S 14      14:62 Schaums and Axiom differ by a constant
dd:=D(cc,x)
--R
--R   (4)  0
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E
```



5 [1]:14.63  $\int \frac{dx}{x(ax+b)}$

$$\int \frac{1}{x(ax+b)} = \frac{1}{b} \ln\left(\frac{x}{ax+b}\right)$$

```

(*)+=
)clear all

--S 15
aa:=integrate(1/(x*(a*x+b)),x)
--R
--R      - log(a x + b) + log(x)
--R (1) -----
--R                      b
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 16
bb:=1/b*log(x/(a*x+b))
--R
--R      x
--R      log(-----)
--R      a x + b
--R (2) -----
--R                      b
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 17
cc:=aa-bb
--R
--R      x
--R      - log(a x + b) + log(x) - log(-----)
--R                                          a x + b
--R (3) -----
--R                      b
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

but we know that

$$\log(a) - \log(b) = \log\left(\frac{a}{b}\right)$$

We can express this fact as a rule:

```

(*)+≡
--S 18
logdiv:=rule(log(a)-log(b) == log(a/b))
--R
--R
--R          a
--I  (4)  - log(b) + log(a) + %I == log(-) + %I
--R          b
--R
--R          Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

and use this rule to rewrite the logs into divisions:

```

(*)+≡
--S 19      14:63 Schaums and Axiom agree
dd:=logdiv cc
--R
--R  (5)  0
--R
--R
--R          Type: Expression Integer
--E

```

so we can see the equivalence directly.

**6 [1]:14.64**  $\int \frac{dx}{x^2 (ax + b)}$

$$\int \frac{1}{x^2 (ax + b)} = -\frac{1}{bx} + \frac{a}{b^2} \ln\left(\frac{ax + b}{x}\right)$$

```

(*)+≡
)clear all

--S 20
aa:=integrate(1/(x^2*(a*x+b)),x)
--R
--R
--R          a x log(a x + b) - a x log(x) - b
--R  (1)  -----
--R          2
--R          b x
--R
--R          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

```

The original form given in the book expands to:

```

(*)+≡
--S 21
bb:=-1/(b*x)+a/b^2*log((a*x+b)/x)
--R
--R
--R      a x + b
--R      a x log(-----) - b
--R              x
--R (2) -----
--R           2
--R          b x
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 22
cc:=aa-bb
--R
--R
--R      a x + b
--R      a log(a x + b) - a log(x) - a log(-----)
--R                                          x
--R (3) -----
--R                               2
--R                              b
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

We can define the following rule to expand log forms:

```

(*)+≡
--S 23
divlog:=rule(log(a/b) == log(a) - log(b))
--R
--R
--R      a
--R (4) log(-) == - log(b) + log(a)
--R      b
--R
--R                                          Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

and apply it to the difference

```

(*)+≡
--S 24      14:64 Schaums and Axiom agree
divlog cc
--R
--R (5)  0
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

7 [1]:14.65  $\int \frac{dx}{x^3 (ax + b)}$

$$\int \frac{1}{x^3 (ax + b)} = \frac{2ax - b}{2b^2x^2} + \frac{a^2}{b^3} \ln\left(\frac{x}{ax + b}\right)$$

```

(*)+=
)clear all
--S 25
aa:=integrate(1/(x^3*(a*x+b)),x)
--R
--R
--R      2 2      2 2      2
--R      - 2a x log(a x + b) + 2a x log(x) + 2a b x - b
--R (1) -----
--R      3 2
--R      2b x
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

```

```

--S 26
bb:=(2*a*x-b)/(2*b^2*x^2)+a^2/b^3*log(x/(a*x+b))
--R
--R
--R      2 2      x      2
--R      2a x log(-----) + 2a b x - b
--R      a x + b
--R (2) -----
--R      3 2
--R      2b x
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 27
cc:=aa-bb
--R
--R
--R      2      2      2      x
--R      - a log(a x + b) + a log(x) - a log(-----)
--R      a x + b
--R (3) -----
--R      3
--R      b
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 28
divlog:=rule(log(a/b) == log(a) - log(b))
--R

```

```

--R      a
--R (4) log(-) == - log(b) + log(a)
--R      b
--R                                     Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

--S 29      14:65 Schaums and Axiom agree
dd:=divlog cc
--R
--R (5) 0
--R
--R                                     Type: Expression Integer
--E

```

8 [1]:14.66  $\int \frac{dx}{(ax + b)^2}$

$$\int \frac{1}{(ax + b)^2} = \frac{-1}{a(ax + b)}$$

```
(*)+=
)clear all
```

```
--S 30
aa:=integrate(1/(a*x+b)^2,x)
```

```
--R
--R
--R      1
--R (1)  - ----
--R      2
--R      a x + a b
```

Type: Union(Expression Integer,...)

```
--E
```

```
--S 31
bb:=-1/(a*(a*x+b))
```

```
--R
--R
--R      1
--R (2)  - ----
--R      2
--R      a x + a b
```

Type: Fraction Polynomial Integer

```
--E
```

```
--S 32 14:66 Schaums and Axiom agree
```

```
cc:=aa-bb
```

```
--R
--R (3)  0
```

Type: Expression Integer

```
--E
```

9 [1]:14.67  $\int \frac{x dx}{(ax + b)^2}$

$$\int \frac{x}{(ax + b)^2} = \frac{b}{a^2(ax + b)} + \frac{1}{a^2} \ln(ax + b)$$

```
(*)+=
)clear all
```

```
--S 33
```

```
aa:=integrate(x/(a*x+b)^2,x)
```

```
--R
```

```
--R      (a x + b)log(a x + b) + b
```

```
--R (1) -----
```

```
--R      3      2
--R     a x + a b
```

```
--R
```

```
Type: Union(Expression Integer,...)
```

```
--E
```

```
--S 34
```

```
bb:=b/(a^2*(a*x+b))+1/a^2*log(a*x+b)
```

```
--R
```

```
--R      (a x + b)log(a x + b) + b
```

```
--R (2) -----
```

```
--R      3      2
--R     a x + a b
```

```
--R
```

```
Type: Expression Integer
```

```
--E
```

```
--S 35      14:67 Schaums and Axiom agree
```

```
cc:=aa-bb
```

```
--R
```

```
--R (3) 0
```

```
--R
```

```
Type: Expression Integer
```

```
--E
```

10 [1]:14.68  $\int \frac{x^2 dx}{(ax + b)^2}$

$$\int \frac{x^2}{(ax + b)^2} = \frac{ax + b}{a^3} - \frac{b^2}{a^3(ax + b)} - \frac{2b}{a^3} \ln(ax + b)$$

```

(*)+≡
)clear all

--S 36
aa:=integrate(x^2/(a*x+b)^2,x)
--R
--R
--R      2      2      2
--R      (- 2a b x - 2b )log(a x + b) + a x  + a b x - b
--R (1) -----
--R      4      3
--R      a x + a b
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

```

and the book expression expands into

```

(*)+≡
--S 37
bb:=(a*x+b)/a^3-b^2/(a^3*(a*x+b))-((2*b)/a^3)*log(a*x+b)
--R
--R
--R      2      2
--R      (- 2a b x - 2b )log(a x + b) + a x  + 2a b x
--R (2) -----
--R      4      3
--R      a x + a b
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

These two expressions differ by the constant

```

(*)+≡
--S 38
cc:=aa-bb
--R
--R
--R      b
--R (3) - --
--R      3
--R      a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```



That this expression is constant can be shown by differentiation:

```
(*)+≡
--S 39      14:68 Schaums and Axiom differ by a constant
D(cc,x)
--R
--R (4)  0
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E
```

11 [1]:14.69  $\int \frac{x^3 dx}{(ax + b)^2}$

$$\int \frac{x^3}{(ax + b)^2} = \frac{(ax + b)^2}{2a^4} - \frac{3b(ax + b)}{a^4} + \frac{b^3}{a^4(ax + b)} + \frac{3b^2}{a^4} \ln(ax + b)$$

```

(*)+≡
)clear all

--S 40
aa:=integrate(x^3/(a*x+b)^2,x)
--R
--R
--R      2      3      3 3      2 2      2      3
--R      (6a b x + 6b )log(a x + b) + a x  - 3a b x  - 4a b x + 2b
--R (1) -----
--R                                 5      4
--R                               2a x + 2a b
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 41
bb:=(a*x+b)^2/(2*a^4)-(3*b*(a*x+b))/a^4+b^3/(a^4*(a*x+b))+(3*b^2/a^4)*log(a*x+b)
--R
--R
--R      2      3      3 3      2 2      2      3
--R      (6a b x + 6b )log(a x + b) + a x  - 3a b x  - 9a b x - 3b
--R (2) -----
--R                                 5      4
--R                               2a x + 2a b
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 42
cc:=aa-bb
--R
--R
--R      2
--R      5b
--R (3) ---
--R      4
--R      2a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 43      14:69 Schaums and Axiom differ by a constant
dd:=D(cc,x)
--R
--R
--R (4) 0

```

```
--R                                         Type: Expression Integer
--E
```

**12 [1]:14.70**  $\int \frac{dx}{x(ax+b)^2}$

$$\int \frac{1}{x(ax+b)^2} = \frac{1}{b(ax+b)} + \frac{1}{b^2} \ln\left(\frac{x}{ax+b}\right)$$

```
<*)+=
)clear all
```

```
--S 44
aa:=integrate(1/(x*(a*x+b)^2),x)
--R
--R      (- a x - b)log(a x + b) + (a x + b)log(x) + b
--R (1) -----
--R              2      3
--R             a b x + b
--R                                         Type: Union(Expression Integer,...)
--E
```

and the book says:

```

(*)+≡
--S 45
bb:=(1/(b*(a*x+b)))+(1/b^2)*log(x/(a*x+b))
--R
--R
--R          x
--R      (a x + b)log(-----) + b
--R                    a x + b
--R (2) -----
--R          2      3
--R        a b x + b
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 46
cc:=aa-bb
--R
--R
--R          x
--R      - log(a x + b) + log(x) - log(-----)
--R                                          a x + b
--R (3) -----
--R          2
--R         b
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

So we look at the divlog rule again:

```

(*)+≡
--S 47
divlog:=rule(log(a/b) == log(a) - log(b))
--R
--R
--R          a
--R      (4) log(-) == - log(b) + log(a)
--R          b
--R
--R                                          Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

we apply it:

```

(*)+≡
--S 48      14:70 Schaums and Axiom agree
dd:=divlog cc
--R
--R (5)  0
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

13 [1]:14.71  $\int \frac{dx}{x^2 (ax + b)^2}$

$$\int \frac{1}{x^2 (ax + b)^2} = \frac{-a}{b^2 (ax + b)} - \frac{1}{b^2 x} + \frac{2a}{b^3} \ln\left(\frac{ax + b}{x}\right)$$

(\*)+=  
)clear all

--S 49

aa:=integrate(1/(x^2\*(a\*x+b)^2),x)

--R

--R 
$$(1) \frac{(2a^2 x^2 + 2a b x) \log(ax + b) + (-2a^2 x^2 - 2a b x) \log(x) - 2a b x - b^2}{a^3 b x^3 + b^4}$$

--R

--R

--R

--E

and the book says:

(\*)+=

--S 50

bb:=(-a/(b^2\*(a\*x+b)))-(1/(b^2\*x))+((2\*a)/b^3)\*log((a\*x+b)/x)

--R

--R 
$$(2) \frac{(2a^2 x^2 + 2a b x) \log\left(\frac{ax + b}{x}\right) - 2a b x - b^2}{a^3 b x^3 + b^4}$$

--R

--R

--R

--R

--E

Type: Expression Integer

--S 51

cc:=aa-bb

--R

--R 
$$(3) \frac{2a \log(ax + b) - 2a \log(x) - 2a \log\left(\frac{ax + b}{x}\right)}{b^3}$$

--R

--R

--R

--R

--E

Type: Expression Integer

which calls for our divlog rule:

```
(*)+≡
--S 52
divlog:=rule(log(a/b) == log(a) - log(b))
--R
--R      a
--R (4) log(-) == - log(b) + log(a)
--R      b
--R
--R                                     Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E
```

which we use to transform the result:

```
(*)+≡
--S 53      14:71 Schaums and Axiom agree
dd:=divlog cc
--R
--R (5)  0
--R
--R                                     Type: Expression Integer
--E
```

14 [1]:14.72  $\int \frac{dx}{x^3 (ax + b)^2}$

$$\int \frac{1}{x^3 (ax + b)^2} = -\frac{(ax + b)^2}{2b^4 x^2} + \frac{3a(ax + b)}{b^4 x} - \frac{a^3 x}{b^4 (ax + b)} - \frac{3a^2}{b^4} \ln\left(\frac{ax + b}{x}\right)$$

```

(*)+=
)clear all

--S 54
aa:=integrate(1/(x^3*(a*x+b)^2),x)
--R
--R (1)
--R      3 3      2 2      3 3      2 2      2 2
--R      (- 6a x - 6a b x )log(a x + b) + (6a x + 6a b x )log(x) + 6a b x
--R      +
--R      2 3
--R      3a b x - b
--R      /
--R      4 3      5 2
--R      2a b x + 2b x
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 55
bb:=- (a*x+b)^2/(2*b^4*x^2)+(3*a*(a*x+b))/(b^4*x)-(a^3*x)/(b^4*(a*x+b))-((3*a^2)/b^4)*1
--R
--R      3 3      2 2      a x + b      3 3      2 2      2 3
--R      (- 6a x - 6a b x )log(-----) + 3a x + 9a b x + 3a b x - b
--R                                  x
--R (2) -----
--R                                  4 3      5 2
--R                                  2a b x + 2b x
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 56
cc:=aa-bb
--R
--R      2      2      2      a x + b      2
--R      - 6a log(a x + b) + 6a log(x) + 6a log(-----) - 3a
--R                                  x
--R (3) -----
--R                                  4
--R                                  2b
--R
--R                                          Type: Expression Integer

```

```

--E

--S 57
divlog:=rule(log(a/b) == log(a) - log(b))
--R
--R      a
--R (4) log(-) == - log(b) + log(a)
--R      b
--R
--R                                     Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

--S 58
dd:=divlog cc
--R
--R      2
--R      3a
--R (5) - ---
--R      4
--R      2b
--R
--R                                     Type: Expression Integer
--E

--S 59      14:72 Schaums and Axiom differ by a constant
ee:=D(dd,x)
--R
--R (6) 0
--R
--R                                     Type: Expression Integer
--E

```



15 [1]:14.73  $\int \frac{dx}{(ax + b)^3}$

$$\int \frac{1}{(ax + b)^3} = \frac{-1}{2a(ax + b)^2}$$

```
(*)+=
)clear all
```

```
--S 60
aa:=integrate(1/(a*x+b)^3,x)
--R
--R
--R      1
--R (1)  -----
--R      3 2      2      2
--R     2a x  + 4a b x + 2a b
--R
--E
```

Type: Union(Expression Integer,...)

```
--S 61
bb:=-1/(2*(a*x+b)^2)
--R
--R
--R      1
--R (2)  -----
--R      2 2      2
--R     2a x  + 4a b x + 2b
--R
--E
```

Type: Fraction Polynomial Integer

```
--S 62
cc:=aa-bb
--R
--R
--R      a - 1
--R (3)  -----
--R      3 2      2      2
--R     2a x  + 4a b x + 2a b
--R
--E
```

Type: Expression Integer

```
--S 63
dd:=aa/bb
--R
--R
--R      1
--R (4)  -
--R      a
--R
```

Type: Expression Integer

--E

--S 64 14:73 Schaums and Axiom differ by a constant

ee:=D(dd,x)

--R

--R (5) 0

--R

Type: Expression Integer

--E

**16 [1]:14.74** 
$$\int \frac{x dx}{(ax + b)^3}$$

$$\int \frac{x}{(ax + b)^3} = \frac{-1}{a^2(ax + b)} + \frac{b}{2a^2(ax + b)^2}$$

<\*)+≡

)clear all

--S 65

aa:=integrate(x/(a\*x+b)^3,x)

--R

--R - 2a x - b

--R (1) -----

--R 4 2 3 2 2

--R 2a x + 4a b x + 2a b

--R

Type: Union(Expression Integer,...)

--E

--S 66

bb:=-1/(a^2\*(a\*x+b))+b/(2\*a^2\*(a\*x+b)^2)

--R

--R - 2a x - b

--R (2) -----

--R 4 2 3 2 2

--R 2a x + 4a b x + 2a b

--R

Type: Fraction Polynomial Integer

--E

--S 67 14:74 Schaums and Axiom agree

cc:=aa-bb

--R

--R (3) 0

--R

Type: Expression Integer

--E

17 [1]:14.75  $\int \frac{x^2 dx}{(ax + b)^3}$

$$\int \frac{x^2}{(ax + b)^3} = \frac{2b}{a^3(ax + b)} - \frac{b^2}{2a^3(ax + b)^2} + \frac{1}{a^3} \ln(ax + b)$$

```

(*)+≡
)clear all

--S 68
aa:=integrate(x^2/(a*x+b)^3,x)
--R
--R
--R      2 2      2      2
--R      (2a x  + 4a b x + 2b )log(a x + b) + 4a b x + 3b
--R (1) -----
--R      5 2      4      3 2
--R      2a x  + 4a b x + 2a b
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 69
bb:=(2*b)/(a^3*(a*x+b))-(b^2)/(2*a^3*(a*x+b)^2)+1/a^3*log(a*x+b)
--R
--R
--R      2 2      2      2
--R      (2a x  + 4a b x + 2b )log(a x + b) + 4a b x + 3b
--R (2) -----
--R      5 2      4      3 2
--R      2a x  + 4a b x + 2a b
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 70      14:75 Schaums and Axiom agree
cc:=aa-bb
--R
--R
--R (3)  0
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

18 [1]:14.76  $\int \frac{x^3 dx}{(ax + b)^3}$

$$\int \frac{x^3}{(ax + b)^3} = \frac{x}{a^3} - \frac{3b^2}{a^4(ax + b)} + \frac{b^3}{2a^4(ax + b)^2} - \frac{3b}{a^4} \ln(ax + b)$$

```

(*)+≡
)clear all
--S 71
aa:=integrate(x^3/(a*x+b)^3,x)
--R
--R (1)
--R      2 2      2 3      3 3      2 2      2 3
--R      (- 6a b x - 12a b x - 6b )log(a x + b) + 2a x + 4a b x - 4a b x - 5b
--R      -----
--R      6 2      5      4 2
--R      2a x + 4a b x + 2a b
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 72
bb:=(x/a^3)-(3*b^2)/(a^4*(a*x+b))+b^3/(2*a^4*(a*x+b)^2)-(3*b)/a^4*log(a*x+b)
--R
--R (2)
--R      2 2      2 3      3 3      2 2      2 3
--R      (- 6a b x - 12a b x - 6b )log(a x + b) + 2a x + 4a b x - 4a b x - 5b
--R      -----
--R      6 2      5      4 2
--R      2a x + 4a b x + 2a b
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 73      14:76 Schaums and Axiom agree
cc:=aa-bb
--R
--R (3)  0
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

19 [1]:14.77  $\int \frac{dx}{x(ax+b)^3}$

$$\int \frac{1}{x(ax+b)^3} = \frac{3}{2b(ax+b)^2} + \frac{2ax}{2b^2(ax+b)^2} - \frac{1}{b^3} * \ln\left(\frac{ax+b}{x}\right)$$

```

(*)+≡
)clear all

--S 74
aa:=integrate(1/(x*(a*x+b)^3),x)
--R
--R (1)
--R      2 2      2      2 2      2
--R      (- 2a x  - 4a b x - 2b )log(a x + b) + (2a x  + 4a b x + 2b )log(x)
--R      +
--R      2
--R      2a b x + 3b
--R      /
--R      2 3 2      4      5
--R      2a b x  + 4a b x + 2b
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

```

```

--S 75
bb:=(a^2*x^2)/(2*b^3*(a*x+b)^2)-(2*a*x)/(b^3*(a*x+b))-(1/b^3)*log((a*x+b)/x)
--R
--R      2 2      2      a x + b      2 2
--R      (- 2a x  - 4a b x - 2b )log(-----) - 3a x  - 4a b x
--R                                  x
--R (2) -----
--R      2 3 2      4      5
--R      2a b x  + 4a b x + 2b
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 76
cc:=aa-bb
--R
--R      a x + b
--R      - 2log(a x + b) + 2log(x) + 2log(-----) + 3
--R                                  x
--R (3) -----
--R      3
--R      2b
--R
--R                                          Type: Expression Integer

```

```

--E

--S 77
divlog:=rule(log(a/b) == log(a) - log(b))
--R
--R      a
--R (4) log(-) == - log(b) + log(a)
--R      b
--R
--R                                     Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

--S 78
dd:=divlog cc
--R
--R      3
--R (5) ---
--R      3
--R     2b
--R
--R                                     Type: Expression Integer
--E

--S 79      14:77 Schaums and Axiom differ by a constant
ee:=D(dd,x)
--R
--R (6) 0
--R
--R                                     Type: Expression Integer
--E

```

20 [1]:14.78  $\int \frac{dx}{x^2(ax+b)^3}$

$$\int \frac{1}{x^2(ax+b)^3} = \frac{-a}{2b^2(ax+b)^2} - \frac{2a}{b^3(ax+b)} - \frac{1}{b^3x} + \frac{3a}{b^4} \ln\left(\frac{ax+b}{x}\right)$$

(\*)+=  
)clear all

```
--S 80
aa:=integrate(1/(x^2*(a*x+b)^3),x)
--R
--R (1)
--R      3 3      2 2      2
--R      (6a x + 12a b x + 6a b x)log(a x + b)
--R +
--R      3 3      2 2      2      2 2      2 3
--R      (- 6a x - 12a b x - 6a b x)log(x) - 6a b x - 9a b x - 2b
--R /
--R      2 4 3      5 2      6
--R      2a b x + 4a b x + 2b x
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E
```

```
--S 81
bb:=-a/(2*b^2*(a*x+b)^2)-(2*a)/(b^3*(a*x+b))-1/(b^3*x)+((3*a)/b^4)*log((a*x+b)/x)
--R
--R      3 3      2 2      2      a x + b      2 2      2 3
--R      (6a x + 12a b x + 6a b x)log(-----) - 6a b x - 9a b x - 2b
--R                                          x
--R (2) -----
--R      2 4 3      5 2      6
--R      2a b x + 4a b x + 2b x
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E
```

```
--S 82
cc:=aa-bb
--R
--R
--R      a x + b
--R      3a log(a x + b) - 3a log(x) - 3a log(-----)
--R                                          x
--R (3) -----
--R      4
--R      b
--R
--R                                          Type: Expression Integer
```

--E

--S 83

divlog:=rule(log(a/b) == log(a) - log(b))

--R

--R

--R (4)  $\log\left(\frac{a}{b}\right) == -\log(b) + \log(a)$

--R

Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)

--E

--S 84 14:78 Schaums and Axiom agree

dd:=divlog cc

--R

--R (5) 0

--R

Type: Expression Integer

--E



21 [1]:14.79  $\int \frac{dx}{x^3(ax+b)^3}$

$$\int \frac{1}{x^3(ax+b)^3} = -\frac{1}{2bx^2(ax+b)^2} + \frac{2a}{b^2x(ax+b)^2} + \frac{9a^2}{b^3(ax+b)^2} + \frac{6a^3x}{b^4(ax+b)^2} - \frac{6a^2}{b^5} \ln\left(\frac{ax+b}{x}\right)$$

```

(*)+=
)clear all

--S 85
aa:=integrate(1/(x^3*(a*x+b)^3),x)
--R
--R (1)
--R      4 4      3 3      2 2 2
--R      (- 12a x - 24a b x - 12a b x )log(a x + b)
--R      +
--R      4 4      3 3      2 2 2      3 3      2 2 2      3 4
--R      (12a x + 24a b x + 12a b x )log(x) + 12a b x + 18a b x + 4a b x - b
--R      /
--R      2 5 4      6 3      7 2
--R      2a b x + 4a b x + 2b x
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 86
bb:=-1/(2*b*x^2*(a*x+b)^2)_
+(2*a)/(b^2*x*(a*x+b)^2)_
+(9*a^2)/(b^3*(a*x+b)^2)_
+(6*a^3*x)/(b^4*(a*x+b)^2)_
+(-6*a^2)/b^5*log((a*x+b)/x)
--R
--R (2)
--R      4 4      3 3      2 2 2      a x + b      3 3      2 2 2
--R      (- 12a x - 24a b x - 12a b x )log(-----) + 12a b x + 18a b x
--R                                          x
--R      +
--R      3 4
--R      4a b x - b
--R      /
--R      2 5 4      6 3      7 2
--R      2a b x + 4a b x + 2b x
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 87
cc:=aa-bb

```

```

--R
--R      2      2      2      a x + b
--R      - 6a log(a x + b) + 6a log(x) + 6a log(-----)
--R
--R      (3) -----
--R
--R      5
--R      b
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 88
divlog:=rule(log(a/b) == log(a) - log(b))
--R
--R      a
--R      (4) log(-) == - log(b) + log(a)
--R      b
--R
--R                                          Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 89      14:79 Schaums and Axiom agree
dd:=divlog cc
--R
--R      (5) 0
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

22 [1]:14.80  $\int (ax + b)^n dx$

$$\int (ax + b)^n = \frac{(ax + b)^{n+1}}{(n + 1)a} \text{ provided } n \neq -1$$

```

(*)+≡
)clear all
--S 90
aa:=integrate((a*x+b)^n,x)
--R
--R              n log(a x + b)
--R      (a x + b)%e
--R      (1) -----
--R              a n + a
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 91
bb:=(a*x+b)^(n+1)/((n+1)*a)
--R
--R              n + 1
--R      (a x + b)
--R      (2) -----
--R              a n + a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 92
cc:=aa-bb
--R
--R              n log(a x + b)              n + 1
--R      (a x + b)%e              - (a x + b)
--R      (3) -----
--R              a n + a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

This messy formula can be simplified using the explog rule:

```

(*)+≡
--S 93
explog:=rule(%e^(n*log(x)) == x^n)
--R
--R      n log(x)      n
--R  (4)  %e      == x
--R
--R                                     Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

--S 94
dd:=explog cc
--R
--R      n + 1      n
--R  - (a x + b)  + (a x + b)(a x + b)
--R  (5)  -----
--R                                     a n + a
--R
--R                                     Type: Expression Integer
--E

--S 95      14:80 Schaums and Axiom agree
ee:=complexNormalize dd
--R
--R  (6)  0
--R
--R                                     Type: Expression Integer
--E

```

23 [1]:14.81  $\int x(ax + b)^n dx$

$$\int x(ax + b)^n = \frac{(ax + b)^{n+2}}{(n + 2)a^2} - \frac{b(ax + b)^{n+1}}{(n + 1)a^2} \text{ provided } n \neq -1, -2$$

```

(*)+=
)clear all
--S 96
aa:=integrate(x*(a*x+b)^n,x)
--R
--R
--R      2      2      2      2      n log(a x + b)
--R      ((a n + a )x  + a b n x - b )%e
--R (1) -----
--R      2 2      2      2
--R      a n  + 3a n + 2a
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 97
bb:=((a*x+b)^(n+2))/((n+2)*a^2)-(b*(a*x+b)^(n+1))/((n+1)*a^2)
--R
--R
--R      n + 2      n + 1
--R      (n + 1)(a x + b)  + (- b n - 2b)(a x + b)
--R (2) -----
--R      2 2      2      2
--R      a n  + 3a n + 2a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 98
cc:=aa-bb
--R
--R
--R (3)
--R      2      2      2      2      n log(a x + b)      n + 2
--R      ((a n + a )x  + a b n x - b )%e  + (- n - 1)(a x + b)
--R +
--R      n + 1
--R      (b n + 2b)(a x + b)
--R /
--R      2 2      2      2
--R      a n  + 3a n + 2a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 99
explog:=rule(%e^(n*log(x)) == x^n)

```

```

--R
--R      n log(x)      n
--R      (4) %e      == x
--R                                     Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 100
dd:=explog cc
--R
--R      (5)
--R      n + 2      n + 1
--R      (- n - 1)(a x + b)      + (b n + 2b)(a x + b)
--R      +
--R      2      2      2      2      n
--R      ((a n + a )x  + a b n x - b )(a x + b)
--R      /
--R      2 2      2      2
--R      a n  + 3a n + 2a
--R
--R                                     Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 101
ee:=complexNormalize dd
--R
--R      (6) 0
--R
--R                                     Type: Expression Integer
--E

```

24 [1]:14.82  $\int x^2(ax + b)^n dx$

$$\int x^2(ax + b)^n = \frac{(ax + b)^{n+2}}{(n + 3)a^3} - \frac{2b(ax + b)^{n+2}}{(n + 2)a^3} + \frac{b^2(ax + b)^{n+1}}{(n + 1)a^3} \text{ provided } n \neq -1, -2, -3$$

```

(*)+≡
)clear all
--S 102
aa:=integrate(x^2*(a*x+b)^n,x)
--R
--R (1)
--R      3 2      3      3 3      2 2      2 2      2      2      3      n log(a x + b)
--R      ((a n + 3a n + 2a )x + (a b n + a b n)x - 2a b n x + 2b )%e
--R      -----
--R                                  3 3      3 2      3      3
--R                                  a n + 6a n + 11a n + 6a
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 103
bb:=(a*x+b)^(n+3)/((n+3)*a^3)-(2*b*(a*x+b)^(n+2))/((n+2)*a^3)+(b^2*(a*x+b)^(n+1))/((n+
--R
--R (2)
--R      2      n + 3      2      n + 2
--R      (n + 3n + 2)(a x + b) + (- 2b n - 8b n - 6b)(a x + b)
--R      +
--R      2 2      2      2      n + 1
--R      (b n + 5b n + 6b )(a x + b)
--R      /
--R      3 3      3 2      3      3
--R      a n + 6a n + 11a n + 6a
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 104
cc:=aa-bb
--R
--R (3)
--R      3 2      3      3 3      2 2      2 2      2      2      3
--R      ((a n + 3a n + 2a )x + (a b n + a b n)x - 2a b n x + 2b )
--R      *
--R      n log(a x + b)
--R      %e
--R      +
--R      2      n + 3      2      n + 2
--R      (- n - 3n - 2)(a x + b) + (2b n + 8b n + 6b)(a x + b)

```

```

--R      +
--R      2 2      2      2      n + 1
--R      (- b n - 5b n - 6b )(a x + b)
--R /
--R      3 3      3 2      3      3
--R      a n + 6a n + 11a n + 6a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 105
explog:=rule(%e^(n*log(x)) == x^n)
--R
--R      n log(x)      n
--R      (4) %e      == x
--R
--R                                          Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 106
dd:=explog cc
--R
--R      (5)
--R      2      n + 3      2      n + 2
--R      (- n - 3n - 2)(a x + b) + (2b n + 8b n + 6b)(a x + b)
--R +
--R      2 2      2      2      n + 1
--R      (- b n - 5b n - 6b )(a x + b)
--R +
--R      3 2      3      3 3      2 2      2      2      2      3      n
--R      ((a n + 3a n + 2a )x + (a b n + a b n)x - 2a b n x + 2b )(a x + b)
--R /
--R      3 3      3 2      3      3
--R      a n + 6a n + 11a n + 6a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 107      14:82 Schaums and Axiom agree
ee:=complexNormalize dd
--R
--R      (6) 0
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```



25 [1]:14.83  $\int x^m(ax + b)^n dx$

$$\int x^m(ax + b)^n \begin{cases} \frac{x^{m+1}(ax + b)^n}{m + n + 1} + \frac{nb}{m + n + 1} \int x^m(ax + b)^{n-1} \\ \frac{x^{m+1}(ax + b)^{n+1}}{(m + n + 1)a} - \frac{mb}{(m + n + 1)a} \int x^{m-1}(ax + b)^n \\ \frac{-x^{m+1}(ax + b)^{n+1}}{(n + 1)b} + \frac{m + n + 2}{(n + 1)b} \int x^m(ax + b)^{n+1} \end{cases}$$

<\*)+=

--S 108 14:83 Axiom cannot do this integration

aa:=integrate(x^m\*(a\*x+b)^n,x)

--R

--R

--R (1)  $\int x^m (b + ax)^n dx$

--R

--R

Type: Union(Expression Integer,...)

--E

)spool

)lisp (bye)

## References

- [1] Spiegel, Murray R. *Mathematical Handbook of Formulas and Tables*  
Schaum's Outline Series McGraw-Hill 1968 pp60-61