

\$SPAD/input schaum24.input

Timothy Daly

June 15, 2008

Contents

1	[1]:14.471	$\int \sin^{-1} \frac{x}{a} dx$	3
2	[1]:14.472	$\int x \sin^{-1} \frac{x}{a} dx$	5
3	[1]:14.473	$\int x^2 \sin^{-1} \frac{x}{a} dx$	10
4	[1]:14.474	$\int \frac{\sin^{-1}(x/a)}{x} dx$	11
5	[1]:14.475	$\int \frac{\sin^{-1}(x/a)}{x^2} dx$	12
6	[1]:14.476	$\int \left(\sin^{-1} \frac{x}{a}\right)^2 dx$	14
7	[1]:14.477	$\int \cos^{-1} \frac{x}{a} dx$	16
8	[1]:14.478	$\int x \cos^{-1} \frac{x}{a} dx$	18
9	[1]:14.479	$\int x^2 \cos^{-1} \frac{x}{a} dx$	20
10	[1]:14.480	$\int \frac{\cos^{-1}(x/a)}{x} dx$	21
11	[1]:14.481	$\int \frac{\cos^{-1}(x/a)}{x^2} dx$	22
12	[1]:14.482	$\int \left(\cos^{-1} \frac{x}{a}\right)^2 dx$	24
13	[1]:14.483	$\int \tan^{-1} \frac{x}{a} dx$	26
14	[1]:14.484	$\int x \tan^{-1} \frac{x}{a} dx$	28
15	[1]:14.485	$\int x^2 \tan^{-1} \frac{x}{a} dx$	29
16	[1]:14.486	$\int \frac{\tan^{-1}(x/a)}{x} dx$	30

17 [1]:14.487	$\int \frac{\tan^{-1}(x/a)}{x^2} dx$	31
18 [1]:14.488	$\int \cot^{-1} \frac{x}{a} dx$	33
19 [1]:14.489	$\int x \cot^{-1} \frac{x}{a} dx$	36
20 [1]:14.490	$\int x^2 \cot^{-1} \frac{x}{a} dx$	39
21 [1]:14.491	$\int \frac{\cot^{-1}(x/a)}{x} dx$	41
22 [1]:14.492	$\int \frac{\cot^{-1}(x/a)}{x^2} dx$	42
23 [1]:14.493	$\int \sec^{-1} \frac{x}{a} dx$	45
24 [1]:14.494	$\int x \sec^{-1} \frac{x}{a} dx$	48
25 [1]:14.495	$\int x^2 \sec^{-1} \frac{x}{a} dx$	50
26 [1]:14.496	$\int \frac{\sec^{-1}(x/a)}{x} dx$	53
27 [1]:14.497	$\int \frac{\sec^{-1}(x/a)}{x^2} dx$	54
28 [1]:14.498	$\int \csc^{-1} \frac{x}{a} dx$	56
29 [1]:14.499	$\int x \csc^{-1} \frac{x}{a} dx$	59
30 [1]:14.500	$\int x^2 \csc^{-1} \frac{x}{a} dx$	61
31 [1]:14.501	$\int \frac{\csc^{-1}(x/a)}{x} dx$	64
32 [1]:14.502	$\int \frac{\csc^{-1}(x/a)}{x^2} dx$	65

33 [1]:14.503	$\int x^m \sin^{-1} \frac{x}{a} dx$	67
34 [1]:14.504	$\int x^m \cos^{-1} \frac{x}{a} dx$	67
35 [1]:14.505	$\int x^m \tan^{-1} \frac{x}{a} dx$	68
36 [1]:14.506	$\int x^m \cot^{-1} \frac{x}{a} dx$	71
37 [1]:14.507	$\int x^m \sec^{-1} \frac{x}{a} dx$	71
38 [1]:14.508	$\int x^m \csc^{-1} \frac{x}{a} dx$	72

1 [1]:14.471 $\int \sin^{-1} \frac{x}{a} dx$

$$\int \sin^{-1} \frac{x}{a} = x \sin^{-1} \frac{x}{a} + \sqrt{a^2 - x^2}$$

```

(*)≡
)spool schaum24.output
)set message test on
)set message auto off
)clear all

--S 1
aa:=integrate(asin(x/a),x)
--R
--R
--R          +-----+
--R          |  2    2      +-----+
--R      2x\|- x  + a      |  2    2
--R  - x atan(-----) + 2\|- x  + a
--R              2    2
--R             2x  - a
--R (1) -----
--R                               2
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 2
bb:=s+asin(x/a)+sqrt(a^2-x^2)
--R
--R          +-----+
--R          |  2    2      x
--R (2)  \|- x  + a  + asin(-) + s
--R                                   a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 3      14:471 Axiom cannot simplify this expression
cc:=aa-bb
--R
--R          +-----+
--R          |  2    2      x
--R      2x\|- x  + a      |  2    2
--R  - x atan(-----) - 2asin(-) - 2s
--R              2    2      a
--R             2x  - a

```

```
--R (3) -----  
--R                                     2  
--R  
--E
```

Type: Expression Integer

2 [1]:14.472 $\int x \sin^{-1} \frac{x}{a} dx$

$$\int x \sin^{-1} \frac{x}{a} = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{4} \right) \sin^{-1} \frac{x}{a} + \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{4}$$

```
<*)+=
)clear all
```

```
--S 4
aa:=integrate(x*asin(x/a),x)
```

```
--R
--R
--R
--R          +-----+
--R          | 2 2      +-----+
--R      2 2      2x\|- x + a      | 2 2
--R      (- 2x + a )atan(-----) + 2x\|- x + a
--R                      2 2
--R                      2x - a
--R (1) -----
--R                                  8
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E
```

```
--S 5
bb:=(x^2/2-a^2/4)*asin(x/a)+(x*sqrt(a^2-x^2))/4
```

```
--R
--R
--R          +-----+
--R          | 2 2      2 2      x
--R      x\|- x + a + (2x - a )asin(-)
--R                                          a
--R (2) -----
--R                                  4
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E
```

```
--S 6
cc:=aa-bb
```

```
--R
--R
--R          +-----+
--R          | 2 2      2 2      x
--R      2 2      2x\|- x + a      2 2      x
--R      (- 2x + a )atan(-----) + (- 4x + 2a )asin(-)
--R                      2 2
--R                      2x - a
--R (3) -----
--R                                  a
```

```

--R
--R
--R                                          8
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

Here we try to understand why we cannot find a simplification that makes these two expressions equal. If the expressions were equal then we could use them as functions, substitute floating point values and expect the same numeric results. So we try that here.

```

(*)+≡
)clear all

This is the initial integrand.
(*)+≡
--S 7
t1:=x*asin(x/a)
--R
--R
--R          x
--R (1) x asin(-)
--R          a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

This is the integral result provided by Axiom.

```

(*)+≡
--S 8
t2:=integrate(t1,x)
--R
--R
--R          +-----+
--R          |  2    2      +-----+
--R          2    2      2x\|- x + a      |  2    2
--R          (- 2x + a )atan(-----) + 2x\|- x + a
--R          2    2
--R          2x - a
--R (2) -----
--R          8
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

```


This is the derivative of the integral computed by Axiom

```

(*)+≡
--S 9
t3:=D(t2,x)
--R
--R
--R          +-----+
--R          |  2    2
--R        2x\|- x  + a
--R      x atan(-----)
--R                2    2
--R              2x  - a
--R (3)  - -----
--R                2
--R
--R
--E

```

Type: Expression Integer

This is the integral result provided by Schaums

```

(*)+≡
--S 10
t4:=(x^2/2-a^2/4)*asin(x/a)+(x*sqrt(a^2-x^2))/4
--R
--R
--R          +-----+
--R          |  2    2          2    2    x
--R        x\|- x  + a  + (2x  - a )asin(-)
--R                                          a
--R (4)  -----
--R                4
--R
--R
--E

```

Type: Expression Integer

This is the derivative of the integral of the original function according to Schaums.

```

(*)+≡
--S 11
t5:=D(t4,x)
--R
--R (5)
--R
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R          +-----+
--R          x | 2 2
--R          (4a x asin(-)\|- x + a
--R          a
--R          2 3 | - x + a ) |-----+
--R          2 2 | 2 2
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R          \|- x + a
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R          4a\|- x + a |-----+
--R          | 2
--R          \|- x + a
--R
-----
--R
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R          4a\|- x + a |-----+
--R          | 2
--R          \|- x + a
--R
Type: Expression Integer
--E

```

Now we create a function for computing the integrand's values.

```

(*)+≡
--S 12
f:=makeFloatFunction(t1,x,a)
--I Compiling function %BF with type (DoubleFloat,DoubleFloat) ->
--R DoubleFloat
--R
--I (6) theMap(MKBCFUNC;binaryFunction;SM;2!0,120)
--R Type: ((DoubleFloat,DoubleFloat) -> DoubleFloat)
--E

```

Now we create a function for computing Axiom's values for its integrand.

```

(*)+≡
--S 13
axiom:=makeFloatFunction(t3,x,a)
--I Compiling function %BJ with type (DoubleFloat,DoubleFloat) ->
--R DoubleFloat
--R
--I (7) theMap(MKBCFUNC;binaryFunction;SM;2!0,996)
--R Type: ((DoubleFloat,DoubleFloat) -> DoubleFloat)
--E

```

Now we create a function for computing Schams values for its integrand.

```

(*)+≡
--S 14
schaums:=makeFloatFunction(t5,x,a)
--I   Compiling function %BK with type (DoubleFloat,DoubleFloat) ->
--R   DoubleFloat
--R
--I   (8)  theMap(MKBCFUNC;binaryFunction;SM;2!0,62)
--R
--R                                     Type: ((DoubleFloat,DoubleFloat) -> DoubleFloat)
--E

```

And now we compute the floating point values for each function and compare the results. As can be clearly seen, the Axiom result lies on a different branch cut from the Schaums result and the functions are only equal within the branch cut range. This is a generic problem with all of the inverse functions that are multi-valued.

```

(*)+≡
--S 15      14:472 Schaums and Axiom agree (modulo branch cuts)
[ [f(i::Float,i::Float+1.0::Float)::Float,axiom(i::Float,i::Float+1.0::Float)::Float,s
--R
--R   (9)
--R   [[0.5235987755 9829892668,0.5235987755 9829892668,0.5235987755 9829881566],
--R   [1.4594553124 539326738,1.4594553124 539326738,1.4594553124 539324518],
--R   [2.5441862369 444430136,- 2.1682027434 402466604,2.5441862369 444430136],
--R   [3.7091808720 064496363,- 2.5740044351 731374839,3.7091808720 064500804]]
--R
--R                                     Type: List List Float
--E

```

3 [1]:14.473 $\int x^2 \sin^{-1} \frac{x}{a} dx$

$$\int x^2 \sin^{-1} \frac{x}{a} = \frac{x^3}{3} \sin^{-1} \frac{x}{a} + \frac{(x^2 + 2a^2)\sqrt{a^2 - x^2}}{9}$$

(*)+=

)clear all

--S 16

aa:=integrate(x^2*asin(x/a),x)

--R

--R

--R

$$\begin{aligned} & \frac{-3x \operatorname{atan}\left(\frac{2x\sqrt{-x^2+a^2}}{2x^2-a^2}\right) + (2x^2+4a^2)\sqrt{-x^2+a^2}}{18} \end{aligned}$$

(1) -----

18

--R

Type: Union(Expression Integer,...)

--E

--S 17

bb:=x^3/3*asin(x/a)+((x^2+2*a^2)*sqrt(a^2-x^2))/9

--R

--R

$$\frac{(x^2+2a^2)\sqrt{-x^2+a^2} + 3x \operatorname{asin}\left(\frac{x}{a}\right)}{9}$$

(2) -----

9

--R

Type: Expression Integer

--E

--S 18 14:473 Axiom cannot simplify this expression

cc:=aa-bb

--R

--R

$$\begin{aligned} & \frac{-x \operatorname{atan}\left(\frac{2x\sqrt{-x^2+a^2}}{2x^2-a^2}\right) - 2x \operatorname{asin}\left(\frac{x}{a}\right)}{9} \end{aligned}$$

(3) -----

--R
 --R
 --E

6

Type: Expression Integer

4 [1]:14.474 $\int \frac{\sin^{-1}(x/a)}{x} dx$

$$\int \frac{\sin^{-1}(x/a)}{x} = \frac{x}{a} + \frac{(x/a)^3}{2 \cdot 3 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3(x/a)^5}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5(x/a)^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 7} + \dots$$

(*)+≡

)clear all

--S 19 14:474 Axiom cannot compute this integral

aa:=integrate(asin(x/a)/x,x)

--R

--R

--I %H

--R x asin(--)

--R ++ a

--I (1) | ----- d%H

--I ++ %H

--R

Type: Union(Expression Integer,...)

--E

5 [1]:14.475 $\int \frac{\sin^{-1}(x/a)}{x^2} dx$

$$\int \frac{\sin^{-1}(x/a)}{x^2} = -\frac{\sin^{-1}(x/a)}{x} - \frac{1}{a} \ln\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right)$$

```
(*)+=
)clear all
```

```
--S 20
aa:=integrate(asin(x/a)/x^2,x)
```

```
--R
--R
--R (1)
--R
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R      - x log(\|- x + a + a) + x log(\|- x + a - a) + a atan(-----)
--R
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R      2x\|- x + a
--R
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R      2x - a
--R
-----
--R
--R      2a x
--R      Type: Union(Expression Integer,...)
--E
```

```
--S 21
bb:=-asin(x/a)/x-1/a*log((a+sqrt(a^2-x^2))/x)
```

```
--R
--R
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R      \|- x + a + a
--R      - x log(-----) - a asin(-)
--R
--R      x
--R      a
--R (2) -----
--R
--R      a x
--R
--R
--R      Type: Expression Integer
--E
```

```
--S 22 14:475 Axiom cannot simplify this expression
cc:=aa-bb
```

```
--R
--R
--R (3)
--R
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R      - x log(\|- x + a + a) + x log(\|- x + a - a)
```

```

--R      +
--R      +-----+
--R      | 2 2
--R      \|- x + a + a
--R      2x log(-----) + a atan(-----) + 2a asin(-----)
--R      x
--R      2x 2 - a
--R      /
--R      2a x
--R
--R      Type: Expression Integer
--E

```

6 [1]:14.476 $\int \left(\sin^{-1}\frac{x}{a}\right)^2 dx$

$$\int \left(\sin^{-1}\frac{x}{a}\right)^2 = x \left(\sin^{-1}\frac{x}{a}\right)^2 - 2x + 2\sqrt{a^2 - x^2} \sin^{-1}\frac{x}{a}$$

(*)+≡
)clear all

--S 23

aa:=integrate(asin(x/a)^2,x)

--R

--R

$$\begin{aligned} & \frac{x \operatorname{atan}\left(\frac{2x\sqrt{-x^2+a^2}}{2x^2-a^2}\right) - 4\sqrt{-x^2+a^2} \operatorname{atan}\left(\frac{2x\sqrt{-x^2+a^2}}{2x^2-a^2}\right) - 8x}{4} \end{aligned}$$

(1) -----
4
Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 24

bb:=x*asin(x/a)^2-2*x+2*sqrt(a^2-x^2)*asin(x/a)

--R

--R

$$(2) \quad \frac{x \sqrt{-x^2+a^2}}{a} + x \operatorname{asin}\left(\frac{x}{a}\right) - 2x$$

--R
Type: Expression Integer
--E

--S 25 14:476 Axiom cannot simplify this expression

cc:=aa-bb

--R

--R

$$(3) \quad \begin{aligned} & \frac{x \operatorname{atan}\left(\frac{2x\sqrt{-x^2+a^2}}{2x^2-a^2}\right) - 4\sqrt{-x^2+a^2} \operatorname{atan}\left(\frac{2x\sqrt{-x^2+a^2}}{2x^2-a^2}\right) - 8x}{4} \\ & + \frac{x \sqrt{-x^2+a^2}}{a} + x \operatorname{asin}\left(\frac{x}{a}\right) - 2x \end{aligned}$$


```

--R      x | 2 2      x 2
--R      - 8asin(-)\|- x + a - 4x asin(-)
--R      a          a
--R /
--R 4
--R
--E

```

Type: Expression Integer

7 [1]:14.477 $\int \cos^{-1} \frac{x}{a} dx$

$$\int \cos^{-1} \frac{x}{a} = x \cos^{-1} \frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2}$$

(*)+≡
)clear all

--S 26

aa:=integrate(acos(x/a),x)

--R

--R

$$x \operatorname{atan}\left(\frac{2x\sqrt{-x^2+a^2}}{2x^2-a^2}\right) - 2\sqrt{-x^2+a^2}$$

(1) $\frac{\dots}{2}$

Type: Union(Expression Integer,...)

--E

--S 27

bb:=x*acos(x/a)-sqrt(a^2-x^2)

--R

$$(2) -\sqrt{-x^2+a^2} + x \operatorname{acos}\left(\frac{x}{a}\right)$$

Type: Expression Integer

--E

--S 28 14:477 Axiom cannot simplify this expression

cc:=aa-bb

--R

$$x \operatorname{atan}\left(\frac{2x\sqrt{-x^2+a^2}}{2x^2-a^2}\right) - 2x \operatorname{acos}\left(\frac{x}{a}\right)$$

(3) $\frac{\dots}{2}$

Type: Expression Integer

--R

--E

8 [1]:14.478 $\int x \cos^{-1} \frac{x}{a} dx$

$$\int x \cos^{-1} \frac{x}{a} = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{4} \right) \cos^{-1} \frac{x}{a} - \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{4}$$

```
(*)+=
)clear all
```

```
--S 29
```

```
aa:=integrate(x*acos(x/a),x)
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

$$(2x^2 - a^2) \operatorname{atan}\left(\frac{2x\sqrt{-x^2 + a^2}}{2x^2 - a^2}\right) - 2x\sqrt{-x^2 + a^2}$$

```
--R (1) -----
```

$$\frac{(2x^2 - a^2) \operatorname{atan}\left(\frac{2x\sqrt{-x^2 + a^2}}{2x^2 - a^2}\right) - 2x\sqrt{-x^2 + a^2}}{8}$$

```
--R
```

```
Type: Union(Expression Integer,...)
```

```
--E
```

```
--S 30
```

```
bb:=(x^2/2-a^2/4)*acos(x/a)-(x*sqrt(a^2-x^2))/4
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

$$-x\sqrt{-x^2 + a^2} + (2x^2 - a^2) \operatorname{acos}\left(\frac{x}{a}\right)$$

```
--R (2) -----
```

$$\frac{-x\sqrt{-x^2 + a^2} + (2x^2 - a^2) \operatorname{acos}\left(\frac{x}{a}\right)}{4}$$

```
--R
```

```
Type: Expression Integer
```

```
--E
```

```
--S 31 14:478 Axiom cannot simplify this expression
```

```
cc:=aa-bb
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

$$(2x^2 - a^2) \operatorname{atan}\left(\frac{2x\sqrt{-x^2 + a^2}}{2x^2 - a^2}\right) + (-4x^2 + 2a^2) \operatorname{acos}\left(\frac{x}{a}\right)$$

```
--R (3) -----
```

--R
--R
--E

8

Type: Expression Integer

9 [1]:14.479 $\int x^2 \cos^{-1} \frac{x}{a} dx$

$$\int x^2 \cos^{-1} \frac{x}{a} = \frac{x^3}{3} \cos^{-1} \frac{x}{a} - \frac{(x^2 + 2a^2)\sqrt{a^2 - x^2}}{9}$$

(*)+=

)clear all

--S 32

aa:=integrate(x^2*acos(x/a),x)

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--S 33

bb:=x^3/3*acos(x/a)-((x^2+2*a^2)*sqrt(a^2-x^2))/9

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

$$(1) \frac{3x \operatorname{atan}\left(\frac{2x\sqrt{-x^2+a^2}}{2x^2-a^2}\right) + (-2x^2-4a^2)\sqrt{-x^2+a^2}}{18}$$

Type: Union(Expression Integer,...)

$$(2) \frac{(-x^2-2a^2)\sqrt{-x^2+a^2} + 3x \operatorname{acos}\left(\frac{x}{a}\right)}{9}$$

Type: Expression Integer

--S 34 14:479 Axiom cannot simplify this expression

cc:=aa-bb

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

$$(3) \frac{x \operatorname{atan}\left(\frac{2x\sqrt{-x^2+a^2}}{2x^2-a^2}\right) - 2x \operatorname{acos}\left(\frac{x}{a}\right)}{9}$$

```
--R
--R                                     6
--R                                     Type: Expression Integer
--E
```

10 [1]:14.480 $\int \frac{\cos^{-1}(x/a)}{x} dx$

$$\int \frac{\cos^{-1}(x/a)}{x} = \frac{x}{2} \ln x - \int \frac{\sin^{-1}(x/a)}{x}$$

```
<*)+≡
)clear all
```

```
--S 35      14:480 Axiom cannot compute this integral
aa:=integrate(acos(x/a)/x,x)
```

```
--R
--R
--R                                     %H
--R      x acos(--)
--R      ++          a
--R      (1) | ----- d%H
--R      ++          %H
```

```
Type: Union(Expression Integer,...)
```

```
--E
```

11 [1]:14.481 $\int \frac{\cos^{-1}(x/a)}{x^2} dx$

$$\int \frac{\cos^{-1}(x/a)}{x^2} = -\frac{\cos^{-1}(x/a)}{x} + \frac{1}{a} \ln\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right)$$

(*)+≡

)clear all

--S 36

aa:=integrate(acos(x/a)/x^2,x)

--R

--R

--R (1)

$$\frac{x \log(\sqrt{-x^2 + a^2} + a) - x \log(\sqrt{-x^2 + a^2} - a) - a \operatorname{atan}\left(\frac{\sqrt{-x^2 + a^2}}{2x\sqrt{-x^2 + a^2}}\right)}{2ax^2 - a}$$

2a x

Type: Union(Expression Integer,...)

--E

--S 37

bb:=-acos(x/a)/x+1/a*log((a+sqrt(a^2-x^2))/x)

--R

--R

$$x \log\left(\frac{\sqrt{-x^2 + a^2} + a}{x}\right) - a \operatorname{acos}\left(\frac{x}{a}\right)$$

a x

Type: Expression Integer

--E

--S 38 14:481 Axiom cannot simplify this expression

cc:=aa-bb

--R

--R (3)

$$x \log(\sqrt{-x^2 + a^2} + a) - x \log(\sqrt{-x^2 + a^2} - a)$$


```

--R      +
--R      +-----+
--R      |  2  2
--R      \|- x  + a  + a
--R      - 2x log(-----) - a atan(-----) + 2a acos(-)
--R      x
--R      +-----+
--R      |  2  2
--R      2x\|- x  + a
--R      2x  - a
--R      /
--R      2a x
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

12 [1]:14.482 $\int \left(\cos^{-1} \frac{x}{a}\right)^2 dx$

$$\int \left(\cos^{-1} \frac{x}{a}\right)^2 = x \left(\cos^{-1} \frac{x}{a}\right)^2 - 2x - 2\sqrt{a^2 - x^2} \cos^{-1} \frac{x}{a}$$

(*)+≡
)clear all

--S 39

aa:=integrate(acos(x/a)^2,x)

--R

--R

$$\begin{aligned} & \frac{x \operatorname{atan}\left(\frac{2x\sqrt{-x^2+a^2}}{2x^2-a^2}\right) - 4\sqrt{-x^2+a^2} \operatorname{atan}\left(\frac{2x\sqrt{-x^2+a^2}}{2x^2-a^2}\right) - 8x}{4} \end{aligned}$$

(1) -----
4
Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 40

bb:=x*acos(x/a)^2-2*x-2*sqrt(a^2-x^2)*acos(x/a)

--R

--R

$$(2) \quad -2a \operatorname{acos}\left(\frac{x}{a}\right) \sqrt{-x^2+a^2} + x \operatorname{acos}\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 2x$$

--R

--R

Type: Expression Integer

--E

--S 41 14:482 Axiom cannot simplify this expression

cc:=aa-bb

--R

--R (3)

$$\begin{aligned} & \frac{x \operatorname{atan}\left(\frac{2x\sqrt{-x^2+a^2}}{2x^2-a^2}\right) - 4\sqrt{-x^2+a^2} \operatorname{atan}\left(\frac{2x\sqrt{-x^2+a^2}}{2x^2-a^2}\right) - 8x}{4} \\ & + \\ & \frac{-2a \operatorname{acos}\left(\frac{x}{a}\right) \sqrt{-x^2+a^2} + x \operatorname{acos}\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 2x}{4} \end{aligned}$$

```

--R      x | 2 2      x 2
--R      8acos(-)\|- x + a - 4x acos(-)
--R      a          a
--R /
--R 4
--R
--E

```

Type: Expression Integer

13 [1]:14.483 $\int \tan^{-1} \frac{x}{a} dx$

$$\int \tan^{-1} \frac{x}{a} = x \tan^{-1} \frac{x}{a} - \frac{a}{2} \ln(x^2 + a^2)$$

(*)+≡
)clear all

```
--S 42
aa:=integrate(atan(x/a),x)
--R
--R
--R          2      2          2a x
--R      - a log(x  + a ) - x atan(-----)
--R                                  2      2
--R                                  x  - a
--R (1) -----
--R                                  2
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E
```

```
--S 43
bb:=x*atan(x/a)-a/2*log(x^2+a^2)
--R
--R          2      2          x
--R      - a log(x  + a ) + 2x atan(-)
--R                                  a
--R (2) -----
--R                                  2
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E
```

```
--S 44
cc:=aa-bb
--R
--R          x          2a x
--R      - 2x atan(-) - x atan(-----)
--R          a          2      2
--R                    x  - a
--R (3) -----
--R                    2
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E
```

```
--S 45
```

```

atanrule:=rule(atan(x) == -%i/2*log((1+%i*x)/(1-%i*x)))
--R
--R          - x + %i
--R      %i log(-----)
--R          x + %i
--R (4) atan(x) == - -----
--R                   2
--R      Type: RewriteRule(Integer,Complex Integer,Expression Complex Integer)
--E

```

```

--S 46
dd:=atanrule cc
--R
--R          2          2          - x + %i a
--R      x + 2%i a x - a      %i x log(-----) + 2%i x log(-----)
--R          2          2          x + %i a
--R      %i x log(-----) + 2%i x log(-----)
--R          2          2          x - 2%i a x - a
--R (5) -----
--R                   4
--R      Type: Expression Complex Integer
--E

```

```

--S 47      14:483 SCHAUMS AND AXIOM DIFFER? (BRANCH CUTS?)
ee:=expandLog dd
--R
--R      %i x log(- 1)
--R (6) -----
--R          2
--R      Type: Expression Complex Integer
--E

```

14 [1]:14.484 $\int x \tan^{-1} \frac{x}{a} dx$

$$\int x \tan^{-1} \frac{x}{a} = \frac{1}{2}(x^2 + a^2) \tan^{-1} \frac{x}{a} - \frac{ax}{2}$$

<*)+≡

)clear all

--S 48 14:484 Axiom cannot compute this integral

aa:=integrate(x*tan(x/a),x)

--R

--R

--R x

--I ++ %H

--I (1) | %H tan(--)d%H

--R ++ a

--R

Type: Union(Expression Integer,...)

--E

15 [1]:14.485 $\int x^2 \tan^{-1} \frac{x}{a} dx$

$$\int x^2 \tan^{-1} \frac{x}{a} = \frac{x^3}{3} \tan^{-1} \frac{x}{a} - \frac{ax^2}{6} + \frac{a^3}{6} \ln(x^2 + a^2)$$

```

(*)+≡
)clear all

--S 49
aa:=integrate(x^2*atan(x/a),x)
--R
--R
--R      3      2      2      3      2a x      2
--R      a log(x + a ) - x atan(-----) - a x
--R                                  2      2
--R                                  x - a
--R (1) -----
--R                                  6
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 50
bb:=x^3/2*atan(x/a)-(a*x^2)/6+a^3/6*log(x^2+a^2)
--R
--R      3      2      2      3      x      2
--R      a log(x + a ) + 3x atan(-) - a x
--R                                  a
--R (2) -----
--R                                  6
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 51      14:485 Axiom cannot simplify this expression
cc:=aa-bb
--R
--R      3      x      3      2a x
--R      - 3x atan(-) - x atan(-----)
--R                                  a      2      2
--R                                  x - a
--R (3) -----
--R                                  6
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

16 [1]:14.486 $\int \frac{\tan^{-1}(x/a)}{x} dx$

$$\int \frac{\tan^{-1}(x/a)}{x} = \frac{x}{a} - \frac{(x/a)^3}{3^2} + \frac{(x/a)^5}{5^2} - \frac{(x/a)^7}{7^2} + \dots$$

<*)+≡

)clear all

--S 52 14:486 Axiom cannot compute this integral

aa:=integrate(atan(x/a)/x,x)

--R

--R

--I %H

--R x atan(--)

--R ++ a

--I (1) | ----- d%H

--I ++ %H

--R

Type: Union(Expression Integer,...)

--E

17 [1]:14.487 $\int \frac{\tan^{-1}(x/a)}{x^2} dx$

$$\int \frac{\tan^{-1}(x/a)}{x^2} = -\frac{1}{x} \tan^{-1} \frac{x}{a} - \frac{1}{2a} \ln \left(\frac{x^2 + a^2}{x^2} \right)$$

(*)+=
)clear all

--S 53

aa:=integrate(atan(x/a)/x^2,x)

--R

--R

--R
$$-x \log(x^2 + a^2) + 2x \log(x) + a \operatorname{atan}\left(\frac{2ax}{x^2 - a^2}\right)$$

--R (1) -----
2ax

--R

Type: Union(Expression Integer,...)

--E

--S 54

bb:=-1/x*atan(x/a)-1/(2*a)*log((x^2+a^2)/x^2)

--R

--R
$$-x \log\left(\frac{x^2 + a^2}{x}\right) - 2a \operatorname{atan}\left(\frac{x}{a}\right)$$

--R (2) -----
2ax

--R

Type: Expression Integer

--E

--S 55

cc:=aa-bb

--R

--R (3)

--R
$$-x \log(x^2 + a^2) + 2x \log(x) + x \log\left(\frac{x^2 + a^2}{x}\right) + 2a \operatorname{atan}\left(\frac{x}{a}\right) + a \operatorname{atan}\left(\frac{2ax}{x^2 - a^2}\right)$$

--R -----
2ax

--R

```
--R                                                    Type: Expression Integer
--E
```

```
--S 56
atanrule:=rule(atan(x) == -%i/2*log((1+%i*x)/(1-%i*x)))
```

```
--R
--R          - x + %i
--R      %i log(-----)
--R          x + %i
--R (4) atan(x) == - -----
--R                    2
--R      Type: RewriteRule(Integer,Complex Integer,Expression Complex Integer)
--E
```

```
--S 57
dd:=atanrule cc
```

```
--R
--R (5)
--R
--R          2      2      2      2
--R          x  + 2%i a x - a
--R      - 2x log(x  + a ) + 4x log(x) - %i a log(-----)
--R                                                    2      2
--R                                                    x  - 2%i a x - a
--R
--R      +
--R          2      2      - x + %i a
--R          x  + a      2%i a log(-----)
--R          2x log(-----) - 2%i a log(-----)
--R                    2      x + %i a
--R                    x
--R
--R      /
--R      4a x
--R
--R                                                    Type: Expression Complex Integer
--E
```

```
--S 58      14:487 SCHAUMS AND AXIOM DIFFER? (branch cuts?)
```

```
ee:=expandLog dd
--R
--R      %i log(- 1)
--R (6) - -----
--R          2x
--R
--R                                                    Type: Expression Complex Integer
--E
```

18 [1]:14.488 $\int \cot^{-1} \frac{x}{a} dx$

$$\int \cot^{-1} \frac{x}{a} = x \cot^{-1} \frac{x}{a} + \frac{a}{2} \ln(x^2 + a^2)$$

(*)+≡

)clear all

--S 59

aa:=integrate(acot(x/a),x)

--R

--R

$$\frac{a \log(x^2 + a^2) + x \operatorname{atan}\left(\frac{2ax}{x^2 - a^2}\right)}{2}$$

(1) -----

--R

--R

Type: Union(Expression Integer,...)

--E

--S 60

bb:=x*acot(x/a)+a/2*log(x^2+a^2)

--R

$$a \log(x^2 + a^2) + 2x \operatorname{acot}\left(\frac{x}{a}\right)$$

(2) -----

--R

--R

Type: Expression Integer

--E

--S 61

cc:=aa-bb

--R

$$x \operatorname{atan}\left(\frac{2ax}{x^2 - a^2}\right) - 2x \operatorname{acot}\left(\frac{x}{a}\right)$$

(3) -----

--R

--R

Type: Expression Integer

--E

--S 62

```

atanrule:=rule(atan(x) == -%i/2*log((1+%i*x)/(1-%i*x)))
--R
--R
--R          - x + %i
--R      %i log(-----)
--R          x + %i
--R (4) atan(x) == - -----
--R                   2
--R      Type: RewriteRule(Integer,Complex Integer,Expression Complex Integer)
--E

```

```

--S 63
dd:=atanrule cc
--R
--R
--R          2          2
--R      x + 2%i a x - a
--R - %i x log(-----) - 4x acot(-)
--R          2          2
--R      x - 2%i a x - a
--R (5) -----
--R                   4
--R
--R      Type: Expression Complex Integer
--E

```

```

--S 64
acotrul:=rule(acot(x) == -%i/2*log((%i*x-1)/(%i*x+1)))
--R
--R
--R          x + %i
--R      %i log(-----)
--R          x - %i
--R (6) acot(x) == - -----
--R                   2
--R      Type: RewriteRule(Integer,Complex Integer,Expression Complex Integer)
--E

```

```

--S 65
ee:=acotrul dd
--R
--R
--R          2          2
--R      x + 2%i a x - a
--R - %i x log(-----) + 2%i x log(-----)
--R          2          2
--R      x - 2%i a x - a
--R (7) -----
--R                   4
--R
--R      Type: Expression Complex Integer
--E

```

--S 66 14:488 Axiom and Schaums agree

ff:=expandLog %

--R

--R (8) 0

--R

Type: Expression Complex Integer

--E

19 [1]:14.489 $\int x \cot^{-1} \frac{x}{a} dx$

$$\int x \cot^{-1} \frac{x}{a} = \frac{1}{2}(x^2 + a^2) \cot^{-1} \frac{x}{a} + \frac{ax}{2}$$

(*)+=

)clear all

--S 67

aa:=integrate(x*acot(x/a),x)

--R

--R

--R
$$\frac{(x^2 + a^2) \operatorname{atan}\left(\frac{2ax}{x^2 - a^2}\right) + 2ax}{4}$$

--R (1) -----

--R

--R

--R

Type: Union(Expression Integer,...)

--S 68

bb:=1/2*(x^2+a^2)*acot(x/a)+(a*x)/2

--R

--R
$$\frac{(x^2 + a^2) \operatorname{acot}\left(\frac{x}{a}\right) + ax}{2}$$

--R (2) -----

--R

--R

--R

Type: Expression Integer

--S 69

cc:=aa-bb

--R

--R
$$\frac{(x^2 + a^2) \operatorname{atan}\left(\frac{2ax}{x^2 - a^2}\right) + (-2x^2 - 2a^2) \operatorname{acot}\left(\frac{x}{a}\right)}{4}$$

--R (3) -----

--R

--R

--R

Type: Expression Integer

--S 70

```

acotrul:=rule(acot(x) == -%i/2*log((%i*x-1)/(%i*x+1)))
--R
--R          x + %i
--R      %i log(-----)
--R          x - %i
--R (4) acot(x) == - -----
--R                    2
--R      Type: RewriteRule(Integer,Complex Integer,Expression Complex Integer)
--E

```

```

--S 71
dd:=acotrul cc
--R
--R          2      2      x + %i a      2      2      2a x
--R      (%i x + %i a )log(-----) + (x + a )atan(-----)
--R          x - %i a                      2      2
--R          x - a
--R (5) -----
--R                    4
--R      Type: Expression Complex Integer
--E

```

```

--S 72
atanrul:=rule(atan(x) == -%i/2*log((1+%i*x)/(1-%i*x)))
--R
--R          - x + %i
--R      %i log(-----)
--R          x + %i
--R (6) atan(x) == - -----
--R                    2
--R      Type: RewriteRule(Integer,Complex Integer,Expression Complex Integer)
--E

```

```

--S 73
ee:=atanrul dd
--R
--R (7)
--R          2      2      x + 2%i a x - a      2      2      x + %i a
--R      (- %i x - %i a )log(-----) + (2%i x + 2%i a )log(-----)
--R          2      2      x - 2%i a x - a                      x - %i a
--R      -----
--R                    8
--R      Type: Expression Complex Integer
--E

```

--S 74 14:489 Axiom and Schaums agree

ff:=expandLog ee

--R

--R (8) 0

--R

Type: Expression Complex Integer

--E

20 [1]:14.490 $\int x^2 \cot^{-1} \frac{x}{a} dx$

$$\int x^2 \cot^{-1} \frac{x}{a} = \frac{x^3}{3} \cot^{-1} \frac{x}{a} + \frac{ax^2}{6} - \frac{a^3}{6} \ln(x^2 + a^2)$$

(*)+≡

)clear all

--S 75

aa:=integrate(x^2*acot(x/a),x)

--R

--R

--R
$$- a \log(x^2 + a^2) + x \operatorname{atan}\left(\frac{2ax}{x^2 - a^2}\right) + ax^2$$

--R (1) -----

--R
$$6$$

--R

Type: Union(Expression Integer,...)

--E

--S 76

bb:=x^3/3*acot(x/a)+(a*x^2)/6-a^3/6*log(x^2+a^2)

--R

--R
$$- a \log(x^2 + a^2) + 2x \operatorname{acot}\left(\frac{x}{a}\right) + ax^2$$

--R (2) -----

--R
$$6$$

--R

Type: Expression Integer

--E

--S 77

cc:=aa-bb

--R

--R
$$x \operatorname{atan}\left(\frac{2ax}{x^2 - a^2}\right) - 2x \operatorname{acot}\left(\frac{x}{a}\right)$$

--R (3) -----

--R
$$6$$

--R

Type: Expression Integer

--E

--S 78

```

atanrule:=rule(atan(x) == -%i/2*log((1+%i*x)/(1-%i*x)))
--R
--R
--R          - x + %i
--R      %i log(-----)
--R          x + %i
--R (4) atan(x) == - -----
--R                    2
--R      Type: RewriteRule(Integer,Complex Integer,Expression Complex Integer)
--E

```

```

--S 79
dd:=atanrule cc
--R
--R
--R          2          2
--R      3 x + 2%i a x - a      3 x
--R - %i x log(-----) - 4x acot(-)
--R          2          2          a
--R      x - 2%i a x - a
--R (5) -----
--R                    12
--R
--R      Type: Expression Complex Integer
--E

```

```

--S 80
acotrul:=rule(acot(x) == -%i/2*log((%i*x-1)/(%i*x+1)))
--R
--R
--R          x + %i
--R      %i log(-----)
--R          x - %i
--R (6) acot(x) == - -----
--R                    2
--R      Type: RewriteRule(Integer,Complex Integer,Expression Complex Integer)
--E

```

```

--S 81
ee:=acotrul dd
--R
--R
--R          2          2          3 x + %i a
--R      3 x + 2%i a x - a      + 2%i x log(-----)
--R          2          2          x - %i a
--R      x - 2%i a x - a
--R (7) -----
--R                    12
--R
--R      Type: Expression Complex Integer
--E

```

```

--S 82      14:490 Axiom and Schaums agree
ff:=expandLog ee
--R
--R      (8)  0
--R
--R                                          Type: Expression Complex Integer
--E

```

21 [1]:14.491 $\int \frac{\cot^{-1}(x/a)}{x} dx$

$$\int \frac{\cot^{-1}(x/a)}{x} = \frac{\pi}{2} \ln x - \int \frac{\tan^{-1}(x/a)}{x}$$

```

(*)+≡
)clear all

```

```

--S 83      14:491 Axiom cannot compute this integral
aa:=integrate(acot(x/a)/x,x)
--R
--R
--R
--R          %H
--R      x acot(--)
--R      ++      a
--R      (1)  | ----- d%H
--R      ++      %H
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

```

22 [1]:14.492 $\int \frac{\cot^{-1}(x/a)}{x^2} dx$

$$\int \frac{\cot^{-1}(x/a)}{x^2} = -\frac{\cot^{-1}(x/a)}{x} + \frac{1}{2a} \ln\left(\frac{x^2 + a^2}{x^2}\right)$$

`<*>+≡
)clear all`

`--S 84`

`aa:=integrate(acot(x/a)/x^2,x)`

`--R`

`--R`

$$\frac{x^2 \log(x^2 + a^2) - 2x \log(x) - a \operatorname{atan}\left(\frac{2ax}{x^2 - a^2}\right)}{2ax}$$

`--R (1) -----`

`--R 2a x`

`Type: Union(Expression Integer,...)`

`--E`

`--S 85`

`bb:=-acot(x/a)/x+1/(2*a)*log((x^2+a^2)/x^2)`

`--R`

`--R`

$$\frac{x \log\left(\frac{x^2 + a^2}{x^2}\right) - 2a \operatorname{acot}\left(\frac{x}{a}\right)}{2ax}$$

`--R (2) -----`

`--R 2a x`

`Type: Expression Integer`

`--E`

`--S 86`

`cc:=aa-bb`

`--R`

`--R (3)`

`--R`

$$\frac{x^2 \log(x^2 + a^2) - 2x \log(x) - x \log\left(\frac{x^2 + a^2}{x^2}\right) - a \operatorname{atan}\left(\frac{2ax}{x^2 - a^2}\right) + 2a \operatorname{acot}\left(\frac{x}{a}\right)}{2ax}$$

`--R -----`

`--R 2a x`

--R Type: Expression Integer
 --E

--S 87
 acotrul:=rule(acot(x) == -%i/2*log((%i*x-1)/(%i*x+1)))

--R
 --R
$$\frac{\%i \log\left(\frac{x + \%i}{x - \%i}\right)}{2}$$

 --R (4) acot(x) == -
 --R Type: RewriteRule(Integer,Complex Integer,Expression Complex Integer)
 --E

--S 88
 dd:=acotrul cc

--R (5)
 --R
$$\frac{x^2 \log(x^2 + a^2) - 2x \log(x) - \%i a \log\left(\frac{x + \%i a}{x - \%i a}\right) - x \log\left(\frac{x^2 + a^2}{x}\right) + a \operatorname{atan}\left(\frac{2ax}{x^2 - a^2}\right)}{2ax}$$

 --R Type: Expression Complex Integer
 --E

--S 89
 atanrule:=rule(atan(x) == -%i/2*log((1+%i*x)/(1-%i*x)))

--R
 --R
$$\frac{\%i \log\left(\frac{-x + \%i}{x + \%i}\right)}{2}$$

 --R (6) atan(x) == -
 --R Type: RewriteRule(Integer,Complex Integer,Expression Complex Integer)
 --E

--S 90
 ee:=atanrule dd

```

--R
--R (7)
--R
--R      2      2      2      2
--R      2x log(x + a ) - 4x log(x) + %i a log(-----)
--R                                         x + 2%i a x - a
--R                                         2      2
--R                                         x - 2%i a x - a
--R
--R +
--R
--R      2      2
--R      x + %i a      x + a
--R      - 2%i a log(-----) - 2x log(-----)
--R                    x - %i a      x
--R
--R /
--R 4a x
--R
--R                                         Type: Expression Complex Integer
--E

```

```

--S 91      14:492 Schaums and Axiom agree
ff:=expandLog ee
--R
--R (8) 0
--R
--R                                         Type: Expression Complex Integer
--E

```

23 [1]:14.493 $\int \sec^{-1} \frac{x}{a} dx$

$$\int \sec^{-1} \frac{x}{a} = \begin{cases} x \sec^{-1} \frac{x}{a} - a \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) & \text{if } 0 < \sec^{-1} \frac{x}{a} < \frac{\pi}{2} \\ x \sec^{-1} \frac{x}{a} + a \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) & \text{if } \frac{\pi}{2} < \sec^{-1} \frac{x}{a} < \pi \end{cases}$$

```

(*)+=
)clear all

--S 92
aa:=integrate(asec(x/a),x)
--R
--R
--R (1)
--R
--R          +-----+
--R          +-+ | 2 2
--R          +-+ 2x\|2 \|- x + a
--R          - a\|2 atan(-----) + x atan(-----)
--R                    2 2
--R                   3x - 2a
--R
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R          2a\|- x + a
--R
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R          \|- x + a
--R
--R          /
--R          2
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 93
bb1:=x*asec(x/a)-a*log(x+sqrt(x^2-a^2))
--R
--R
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R          - a log(\|x - a + x) + x asec(-)
--R
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 94
bb2:=x*asec(x/a)+a*log(x+sqrt(x^2-a^2))
--R

```

```

--R          +-----+
--R          | 2    2          x
--R (3)  a log(\|x  - a  + x) + x asec(-)
--R                                     a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 95
cc1:=aa-bb1

```

```

--R (4)
--R
--R          +-----+
--R          | 2    2          +-+ | 2    2
--R          2a log(\|x  - a  + x) - a\|2 atan(-----)
--R                                     2    2
--R                                     3x  - 2a
--R
--R +
--R          +-----+
--R          | 2    2
--R          2a\|- x  + a
--R
--R          x atan(-----) - 2a atan(-----) - 2x asec(-)
--R          2                                     +-----+
--R          x                                     | 2    2
--R                                               \|- x  + a
--R
--R /
--R 2
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 96 14:493 Axiom cannot simplify these expressions
cc2:=aa-bb2

```

```

--R (5)
--R
--R          +-----+
--R          | 2    2          +-+ | 2    2
--R          - 2a log(\|x  - a  + x) - a\|2 atan(-----)
--R                                     2    2
--R                                     3x  - 2a
--R
--R +
--R          +-----+
--R          | 2    2
--R          2a\|- x  + a
--R
--R          x atan(-----) - 2a atan(-----) - 2x asec(-)
--R          2                                     +-----+
--R                                               | 2    2
--R                                               \|- x  + a
--R
--R          a

```



```

--R      x      |  2  2
--R      \|- x  + a
--R  /
--R      2
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

24 [1]:14.494 $\int x \sec^{-1} \frac{x}{a} dx$

$$\int x \sec^{-1} \frac{x}{a} = \begin{cases} \frac{x^2}{2} \sec^{-1} \frac{x}{a} - \frac{a\sqrt{x^2 - a^2}}{2} & \text{if } 0 < \sec^{-1} \frac{x}{a} < \frac{\pi}{2} \\ \frac{x^2}{2} \sec^{-1} \frac{x}{a} + \frac{a\sqrt{x^2 - a^2}}{2} & \text{if } \frac{\pi}{2} < \sec^{-1} \frac{x}{a} < \pi \end{cases}$$

(*)+=
)clear all

--S 97

aa:=integrate(x*asec(x/a),x)

--R

--R

$$\frac{(x^2 - 2a^2) \operatorname{atan}\left(\frac{2a\sqrt{-x^2 + a^2}}{x}\right) + 2a\sqrt{-x^2 + a^2}}{4}$$

(1) -----

--R

Type: Union(Expression Integer,...)

--E

--S 98

bb1:=x^2/2*asec(x/a)-(a*sqrt(x^2-a^2))/2

--R

$$-a\sqrt{x^2 - a^2} + x \operatorname{asec}\left(\frac{x}{a}\right)$$

(2) -----

--R

Type: Expression Integer

--E

--S 99

bb2:=x^2/2*asec(x/a)+(a*sqrt(x^2-a^2))/2

--R

$$a\sqrt{x^2 - a^2} + x \operatorname{asec}\left(\frac{x}{a}\right)$$

(3) -----

```

--R          2
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 100
cc1:=aa-bb1

```

```

--R
--R (4)
--R
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R          2a\|- x + a
--R          +-----+ +-----+
--R          | 2 2 | 2 2
--R          2a\|x - a + 2a\|- x + a
--R          - 2x asec(-)
--R          2 x
--R          -----
--R          4
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 101 14:494 Axiom cannot simplify these expressions
cc2:=aa-bb2

```

```

--R
--R (5)
--R
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R          2a\|- x + a
--R          +-----+ +-----+
--R          | 2 2 | 2 2
--R          2a\|x - a + 2a\|- x + a
--R          - 2x asec(-)
--R          2 x
--R          -----
--R          4
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

25 [1]:14.495 $\int x^2 \sec^{-1} \frac{x}{a} dx$

$$\int x^2 \sec^{-1} \frac{x}{a} = \begin{cases} \frac{x^3}{3} \sec^{-1} \frac{x}{a} - \frac{ax\sqrt{x^2 - a^2}}{6} - \frac{a^3}{6} \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) & \text{if } 0 < \sec^{-1} \frac{x}{a} < \frac{\pi}{2} \\ \frac{x^3}{3} \sec^{-1} \frac{x}{a} + \frac{ax\sqrt{x^2 - a^2}}{6} + \frac{a^3}{6} \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) & \text{if } \frac{\pi}{2} < \sec^{-1} \frac{x}{a} < \pi \end{cases}$$

(*)+=
)clear all

--S 102

aa:=integrate(x^2*asec(x/a),x)

--R

--R

--R (1)

$$\begin{aligned} & - 2a \sqrt{2} \operatorname{atan}\left(\frac{2x\sqrt{2}\sqrt{-x^2+a^2}}{3x^2-2a^2}\right) + x \operatorname{atan}\left(\frac{2a\sqrt{-x^2+a^2}}{x}\right) \\ & + \\ & - 5a \operatorname{atan}\left(\frac{x}{\sqrt{-x^2+a^2}}\right) + a x \sqrt{-x^2+a^2} \end{aligned}$$

--R /

--R 6

Type: Union(Expression Integer,...)

--E

--S 103

bb1:=x^3/3*asec(x/a)-(a*x*sqrt(x^2-a^2))/6-a^3/6*log(x+sqrt(x^2-a^2))

--R

$$- a \log(\sqrt{x^2 - a^2} + x) - a x \sqrt{x^2 - a^2} + 2x \operatorname{asec}\left(\frac{x}{a}\right)$$

--R

```

--R (2) -----
--R                                     6
--R                                     Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 104
bb2:=x^3/3*asec(x/a)+(a*x*sqrt(x^2-a^2))/6+a^3/6*log(x+sqrt(x^2-a^2))

```

```

--R
--R          +-----+          +-----+
--R          3      | 2      2          | 2      2          3      x
--R          a log(\|x  - a  + x) + a x\|x  - a  + 2x asec(-)
--R                                                     a
--R (3) -----
--R                                     6
--R                                     Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 105
cc1:=aa-bb1

```

```

--R (4)
--R
--R          +-----+
--R          +-----+          +-+ | 2      2
--R          3      | 2      2          3 +-+ 2x\|2 \| - x  + a
--R          a log(\|x  - a  + x) - 2a \|2 atan(-----)
--R                                                     2      2
--R                                                     3x  - 2a
--R
--R +
--R          +-----+
--R          | 2      2          3          x          +-----+
--R          3      2a\|- x  + a          3          x          | 2      2
--R          x atan(-----) - 5a atan(-----) + a x\|x  - a
--R          2          +-----+
--R          x          | 2      2
--R          \| - x  + a
--R
--R +
--R          +-----+
--R          | 2      2          3      x
--R          a x\|- x  + a  - 2x asec(-)
--R                                     a
--R /
--R 6
--R                                     Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 106      14:495 Axiom cannot simplify these expressions

```

cc2:=aa-bb2

--R

--R (5)

--R

$$- a \log(\sqrt{x^2 - a^2} + x) - 2a \sqrt{2} \operatorname{atan}\left(\frac{2x\sqrt{2}\sqrt{-x^2 + a^2}}{3x^2 - 2a^2}\right)$$

--R

--R +

$$x \operatorname{atan}\left(\frac{2a\sqrt{-x^2 + a^2}}{x}\right) - 5a \operatorname{atan}\left(\frac{x}{\sqrt{-x^2 + a^2}}\right) - a x \sqrt{x^2 - a^2}$$

--R

--R +

$$a x \sqrt{-x^2 + a^2} - 2x \operatorname{asec}\left(\frac{x}{a}\right)$$

--R

--R /

--R 6

--R

--E

Type: Expression Integer

26 [1]:14.496 $\int \frac{\sec^{-1}(x/a)}{x} dx$

$$\int \frac{\sec^{-1}(x/a)}{x} = \frac{\pi}{2} \ln x + \frac{a}{x} + \frac{(a/x)^3}{2 \cdot 3 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 (a/x)^5}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 (a/x)^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 7} + \dots$$

```
<*)+≡
)clear all
```

```
--S 107 14:496 Axiom cannot compute this integral
```

```
aa:=integrate(asec(x/a)/x,x)
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--I          %H
--R      x asec(--)
```

```
--R      ++      a
--I (1) | ----- d%H
```

```
--I      ++      %H
```

```
--R
```

```
Type: Union(Expression Integer,...)
```

```
--E
```

27 [1]:14.497 $\int \frac{\sec^{-1}(x/a)}{x^2} dx$

$$\int \frac{\sec^{-1}(x/a)}{x^2} = \begin{cases} -\frac{\sec^{-1}(x/a)}{x} + \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{ax} & \text{if } 0 < \sec^{-1} \frac{x}{a} < \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\sec^{-1}(x/a)}{x} - \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{ax} & \text{if } \frac{\pi}{2} < \sec^{-1} \frac{x}{a} < \pi \end{cases}$$

```
(*)+=
)clear all
```

```
--S 108
```

```
aa:=integrate(asec(x/a)/x^2,x)
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

$$(1) \frac{x \operatorname{atan}\left(\frac{2x\sqrt{2}\sqrt{-x^2+a^2}}{3x^2-2a^2}\right) - a\sqrt{2} \operatorname{atan}\left(\frac{2a\sqrt{-x^2+a^2}}{x}\right)}{2ax\sqrt{2}}$$

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--E
```

Type: Union(Expression Integer,...)

```
--S 109
```

```
bb1:=-asec(x/a)/x+sqrt(x^2-a^2)/(a*x)
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

$$(2) \frac{\sqrt{x^2 - a^2} - a \operatorname{asec}\left(\frac{x}{a}\right)}{ax}$$

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--E
```

Type: Expression Integer

```
--S 110
```

```
bb2:=-asec(x/a)/x-sqrt(x^2-a^2)/(a*x)
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

$$-\sqrt{x^2 - a^2} - a \operatorname{asec}\left(\frac{x}{a}\right)$$

```
--R
```



```

--R
--R (3) ----- a
--R          a x
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 111
cc1:=aa-bb1

```

```

--R (4)
--R          +-----+
--R          +-+ | 2 2
--R          2x\|2 \|- x + a
--R          x atan(-----) - a\|2 atan(-----) - 2\|2 \|x - a
--R                    2 2                      2
--R                   3x - 2a                      x
--R
--R          +
--R          +-+ x
--R          2a\|2 asec(-)
--R                    a
--R
--R          /
--R          +-+
--R          2a x\|2
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 112 14:497 Axiom cannot simplify these expressions
cc2:=aa-bb2

```

```

--R (5)
--R          +-----+
--R          +-+ | 2 2
--R          2x\|2 \|- x + a
--R          x atan(-----) - a\|2 atan(-----) + 2\|2 \|x - a
--R                    2 2                      2
--R                   3x - 2a                      x
--R
--R          +
--R          +-+ x
--R          2a\|2 asec(-)
--R                    a
--R
--R          /
--R          +-+
--R          2a x\|2
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

28 [1]:14.498 $\int \csc^{-1} \frac{x}{a} dx$

$$\int \csc^{-1} \frac{x}{a} = \begin{cases} x \csc^{-1} \frac{x}{a} + a \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) & \text{if } 0 < \csc^{-1} \frac{x}{a} < \frac{\pi}{2} \\ x \csc^{-1} \frac{x}{a} - a \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) & \text{if } -\frac{\pi}{2} < \csc^{-1} \frac{x}{a} < 0 \end{cases}$$

```

(*)+=
)clear all

--S 113
aa:=integrate(acsc(x/a),x)
--R
--R
--R (1)
--R
--R          +-----+
--R          +-+ | 2 2
--R          2x\|2 \|- x + a
--R          a\|2 atan(-----) - x atan(-----)
--R                    2 2
--R                   3x - 2a
--R
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R          2a\|- x + a
--R
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R          \|- x + a
--R
--R          /
--R          2
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 114
bb1:=x*acsc(x/a)+a*log(x+sqrt(x^2-a^2))
--R
--R
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R          a log(\|x - a + x) + x acsc(-)
--R
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 115
bb2:=x*acsc(x/a)-a*log(x+sqrt(x^2-a^2))
--R

```

```

--R          +-----+
--R          | 2 2      x
--R (3)  - a log(\|x - a + x) + x acsc(-)
--R                                     a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 116
cc1:=aa-bb1

```

```

--R (4)
--R
--R          +-----+
--R          | 2 2      +-+ | 2 2
--R          | 2 2      +-+ 2x\|2 \|- x + a
--R - 2a log(\|x - a + x) + a\|2 atan(-----)
--R                                     2 2
--R                                    3x - 2a
--R
--R +
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R          2a\|- x + a
--R
--R          x
--R - x atan(-----) + 2a atan(-----) - 2x acsc(-)
--R          2
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R          \|- x + a
--R
--R /
--R 2
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 117 14:498 Axiom cannot simplify these expressions
cc2:=aa-bb2

```

```

--R (5)
--R
--R          +-----+
--R          | 2 2      +-+ | 2 2
--R          | 2 2      +-+ 2x\|2 \|- x + a
--R 2a log(\|x - a + x) + a\|2 atan(-----)
--R                                     2 2
--R                                    3x - 2a
--R
--R +
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R          2a\|- x + a
--R
--R          x
--R - x atan(-----) + 2a atan(-----) - 2x acsc(-)
--R          2
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R          \|- x + a
--R
--R          a

```

```

--R          x          |  2  2
--R          /         \|- x  + a
--R          2
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

29 [1]:14.499 $\int x \csc^{-1} \frac{x}{a} dx$

$$\int x \csc^{-1} \frac{x}{a} = \begin{cases} \frac{x^2}{2} \csc^{-1} \frac{x}{a} + \frac{a\sqrt{x^2 - a^2}}{2} & \text{if } 0 < \csc^{-1} \frac{x}{a} < \frac{\pi}{2} \\ \frac{x^2}{2} \csc^{-1} \frac{x}{a} - \frac{a\sqrt{x^2 - a^2}}{2} & \text{if } -\frac{\pi}{2} < \csc^{-1} \frac{x}{a} < 0 \end{cases}$$

`<*>+=`
`)clear all`

--S 118

`aa:=integrate(x*acsc(x/a),x)`

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

$$(1) \frac{(-x^2 + 2a^2) \operatorname{atan}\left(\frac{2a\sqrt{-x^2 + a^2}}{x}\right) - 2a\sqrt{-x^2 + a^2}}{4}$$

Type: Union(Expression Integer,...)

--S 119

`bb1:=x^2/2*acsc(x/a)+(a*sqrt(x^2-a^2))/2`

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

$$(2) \frac{a\sqrt{x^2 - a^2} + x \operatorname{acsc}\left(\frac{x}{a}\right)}{2}$$

Type: Expression Integer

--S 120

`bb2:=x^2/2*acsc(x/a)-(a*sqrt(x^2-a^2))/2`

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

$$(3) \frac{-a\sqrt{x^2 - a^2} + x \operatorname{acsc}\left(\frac{x}{a}\right)}{2}$$

```

--R
--R      2
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 121
cc1:=aa-bb1

```

```

--R
--R (4)
--R
--R      +-----+
--R      | 2 2      +-----+      +-----+
--R      2a\|- x + a      | 2 2      | 2 2      2 x
--R      (- x + 2a )atan(-----) - 2a\|x - a - 2a\|- x + a - 2x acsc(-)
--R                        2
--R                        x
--R
--R -----
--R
--R                                          4
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 122 14:499 Axiom cannot simplify these expressions
cc2:=aa-bb2

```

```

--R
--R (5)
--R
--R      +-----+
--R      | 2 2      +-----+      +-----+
--R      2a\|- x + a      | 2 2      | 2 2      2 x
--R      (- x + 2a )atan(-----) + 2a\|x - a - 2a\|- x + a - 2x acsc(-)
--R                        2
--R                        x
--R
--R -----
--R
--R                                          4
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

30 [1]:14.500 $\int x^2 \csc^{-1} \frac{x}{a} dx$

$$\int x^2 \csc^{-1} \frac{x}{a} = \begin{cases} \frac{x^3}{3} \csc^{-1} \frac{x}{a} + \frac{ax\sqrt{x^2 - a^2}}{6} + \frac{a^3}{6} \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) & \text{if } 0 < \csc^{-1} \frac{x}{a} < \frac{\pi}{2} \\ \frac{x^3}{3} \sec^{-1} \frac{x}{a} - \frac{ax\sqrt{x^2 - a^2}}{6} - \frac{a^3}{6} \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) & \text{if } -\frac{\pi}{2} < \csc^{-1} \frac{x}{a} < 0 \end{cases}$$

```
(*)+=
)clear all
```

```
--S 123
```

```
aa:=integrate(x^2*acsc(x/a),x)
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R (1)
```

```
--R
--R          +-----+
--R          +-+ | 2 2
--R          3 +-+ 2x\|2 \|- x + a      3      2a\|- x + a
--R          2a \|2 atan(-----) - x atan(-----)
--R                      2      2
--R                      3x - 2a      x
--R
--R  +
--R
--R          +-----+
--R          3      x      | 2 2
--R          5a atan(-----) - a x\|- x + a
--R          +-----+
--R          | 2 2
--R          \|- x + a
--R
--R  /
```

```
--R
```

```
--R 6
```

```
--R
```

```
--E
```

Type: Union(Expression Integer,...)

```
--S 124
```

```
bb1:=x^3/3*acsc(x/a)+(a*x*sqrt(x^2-a^2))/6+a^3/6*log(x+sqrt(x^2-a^2))
```

```
--R
```

```
--R
--R          +-----+
--R          3      | 2 2
--R          a log(\|x - a + x) + a x\|x - a + 2x acsc(-)
--R
--R
--R          a
```

```

--R (2) -----
--R                                     6
--R                                     Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 125
bb2:=x^3/3*acsc(x/a)-(a*x*sqrt(x^2-a^2))/6-a^3/6*log(x+sqrt(x^2-a^2))

```

```

--R
--R          +-----+          +-----+
--R          3      | 2      2          | 2      2      3      x
--R      - a log(\|x  - a  + x) - a x\|x  - a  + 2x acsc(-)
--R                                                     a
--R (3) -----
--R                                     6
--R                                     Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 126
cc1:=aa-bb1

```

```

--R
--R (4)
--R
--R          +-----+          +-----+
--R          3      | 2      2          +-+ | 2      2
--R      - a log(\|x  - a  + x) + 2a \|2 atan(-----)
--R                                                     2      2
--R                                                     3x  - 2a
--R
--R +
--R          +-----+          +-----+
--R          | 2      2          3      x          | 2      2
--R      - x atan(-----) + 5a atan(-----) - a x\|x  - a
--R          2          +-----+
--R          x          | 2      2
--R                    \|- x  + a
--R
--R +
--R          +-----+
--R          | 2      2      3      x
--R      - a x\|- x  + a  - 2x acsc(-)
--R                                     a
--R /
--R 6
--R
--R                                     Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 127 14:500 Axiom cannot simplify this expression

```


cc2:=aa-bb2

--R

--R (5)

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--E

$$\begin{aligned}
 & a \log(\sqrt{x^2 - a^2} + x) + 2a \sqrt{2} \operatorname{atan}\left(\frac{2x\sqrt{2}\sqrt{-x^2 + a^2}}{3x^2 - 2a^2}\right) \\
 & + \\
 & - x \operatorname{atan}\left(\frac{2a\sqrt{-x^2 + a^2}}{x}\right) + 5a \operatorname{atan}\left(\frac{x}{\sqrt{-x^2 + a^2}}\right) + a x \sqrt{x^2 - a^2} \\
 & + \\
 & - a x \sqrt{-x^2 + a^2} - 2x \operatorname{acsc}\left(\frac{x}{a}\right)
 \end{aligned}$$

/ 6

Type: Expression Integer

31 [1]:14.501 $\int \frac{\csc^{-1}(x/a)}{x} dx$

$$\int \frac{\csc^{-1}(x/a)}{x} = - \left(\frac{a}{x} + \frac{(a/x)^3}{2 \cdot 3 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3(a/x)^5}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5(a/x)^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 7} + \dots \right)$$

```
<*)+=
)clear all
```

```
--S 128 14:501 Axiom cannot compute this integral
```

```
aa:=integrate(acsc(x/a)/x,x)
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R          %H
--R      x acsc(--)
--R      ++      a
```

```
--I (1) | ----- d%H
```

```
--I      ++      %H
```

```
--R
```

```
--E
```

```
Type: Union(Expression Integer,...)
```

32 [1]:14.502 $\int \frac{\csc^{-1}(x/a)}{x^2} dx$

$$\int \frac{\csc^{-1}(x/a)}{x^2} = \begin{cases} -\frac{\csc^{-1}(x/a)}{x} - \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{ax} & \text{if } 0 < \csc^{-1} \frac{x}{a} < \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\csc^{-1}(x/a)}{x} + \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{ax} & \text{if } -\frac{\pi}{2} < \csc^{-1} \frac{x}{a} < 0 \end{cases}$$

```
(*)+=
)clear all
```

```
--S 129
```

```
aa:=integrate(acsc(x/a)/x^2,x)
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

$$-x \operatorname{atan}\left(\frac{2x\sqrt{2}\sqrt{-x^2+a^2}}{3x^2-2a^2}\right) + a\sqrt{2} \operatorname{atan}\left(\frac{2a\sqrt{-x^2+a^2}}{x}\right)$$

```
--R
```

```
--R (1)
```

$$\frac{2a x \sqrt{2}}{2a x \sqrt{2}}$$

```
--R
```

```
Type: Union(Expression Integer,...)
```

```
--E
```

```
--S 130
```

```
bb1:=-acsc(x/a)/x-sqrt(x^2-a^2)/(a*x)
```

```
--R
```

```
--R
```

$$-\frac{\sqrt{x^2 - a^2} - a \operatorname{acsc}\left(\frac{x}{a}\right)}{a x}$$

```
--R
```

```
--R (2)
```

$$a x$$

```
--R
```

```
Type: Expression Integer
```

```
--E
```

```
--S 131
```

```
bb2:=-acsc(x/a)/x+sqrt(x^2-a^2)/(a*x)
```

```
--R
```

```
--R
```

$$\frac{\sqrt{x^2 - a^2} - a \operatorname{acsc}\left(\frac{x}{a}\right)}{a x}$$

```
--R
```

```

--R
--R (3) -----
--R          a
--R        a x
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 132
cc1:=aa-bb1

```

```

--R (4)
--R
--R          +-----+
--R        +-+ | 2 2          +-----+
--R      2x\|2 \|- x + a      +-+ 2a\|- x + a
--R  - x atan(-----) + a\|2 atan(-----)
--R                2 2                      2
--R              3x - 2a                      x
--R
--R  +
--R          +-----+
--R        +-+ | 2 2          +-+ x
--R      2\|2 \|x - a + 2a\|2 acsc(-)
--R                                  a
--R
--R  /
--R        +-+
--R      2a x\|2
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 133 14:502 Axiom cannot simplify this expression
cc2:=aa-bb2

```

```

--R (5)
--R
--R          +-----+
--R        +-+ | 2 2          +-----+
--R      2x\|2 \|- x + a      +-+ 2a\|- x + a
--R  - x atan(-----) + a\|2 atan(-----)
--R                2 2                      2
--R              3x - 2a                      x
--R
--R  +
--R          +-----+
--R        +-+ | 2 2          +-+ x
--R      - 2\|2 \|x - a + 2a\|2 acsc(-)
--R                                  a
--R
--R  /
--R        +-+
--R      2a x\|2
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

--E

33 [1]:14.503 $\int x^m \sin^{-1} \frac{x}{a} dx$

$$\int x^m \sin^{-1} \frac{x}{a} = \frac{x^{m+1}}{m+1} \sin^{-1} \frac{x}{a} - \frac{1}{m+1} \int \frac{x^{m+1}}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$\langle * \rangle + \equiv$
)clear all

--S 134 14:503 Axiom cannot compute this integral

aa:=integrate(x^m*asin(x/a),x)

--R

--R

--R

--I

--I

--R

--R

--R

--E

$$(1) \int x^m \operatorname{asin}\left(\frac{x}{a}\right) dx$$

Type: Union(Expression Integer,...)

34 [1]:14.504 $\int x^m \cos^{-1} \frac{x}{a} dx$

$$\int x^m \cos^{-1} \frac{x}{a} = \frac{x^{m+1}}{m+1} \cos^{-1} \frac{x}{a} + \frac{1}{m+1} \int \frac{x^{m+1}}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$\langle * \rangle + \equiv$
)clear all

--S 135 14:504 Axiom cannot compute this integral

aa:=integrate(x^m*acos(x/a),x)

--R

--R

--R

--I

--I

--R

--R

--E

$$(1) \int x^m \operatorname{acos}\left(\frac{x}{a}\right) dx$$

Type: Union(Expression Integer,...)

35 [1]:14.505 $\int x^m \tan^{-1} \frac{x}{a} dx$

$$\int x^m \tan^{-1} \frac{x}{a} = \frac{x^{m+1}}{m+1} \tan^{-1} \frac{x}{a} - \frac{a}{m+1} \int \frac{x^{m+1}}{x^2 + a^2}$$

This appears to be an interesting integral. Axiom found a closed form solution to the problem. However, the t1 integral below does not have a closed form solution. Note that we did not return a result for the prior two integrals, nor for the next integral. They have the same form but are expressed in terms of asin, acos, and acot.

```

(*)+≡
)clear all

--S 136
aa:=integrate(x*m*atan(x/a),x)
--R
--R
--R          2      2      2a x
--R      (- m x  - a m)atan(-----) - 2a m x
--R                          2      2
--R                          x  - a
--R (1) -----
--R                          4
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 137
t1:=integrate(x^(m+1)/(x^2+a^2),x)
--E

```

Since we cannot get a closed form version of the prior integral we proceed to try to prove that Axiom got a correct answer. We do this by computing the derivate of 'aa' above and finding the difference from the original formula.

So first we generate the derivative:

```

(*)+≡
--S 138
bb:=D(aa,x)
--R
--R
--R          2a x
--R      m x atan(-----)
--R          2    2
--R         x  - a
--R (3)  -----
--R          2
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

Then we input the original expression

```

(*)+≡
--S 139
aa1:=x*m*atan(x/a)
--R
--R
--R          x
--R      m x atan(-)
--R          a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

Now we take their difference

```

(*)+≡
--S 140
dd:=aa1-bb
--R
--R
--R          x          2a x
--R      2m x atan(-) + m x atan(-----)
--R          a          2    2
--R                   x  - a
--R (5)  -----
--R          2
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

Now we input the atan transformation

```

(*)+≡
--S 141
atanrule:=rule(atan(x) == -%i/2*log((1+%i*x)/(1-%i*x)))
--R
--R
--R          - x + %i
--R      %i log(-----)
--R          x + %i
--R (6)  atan(x) == - -----
--R                      2
--R      Type: RewriteRule(Integer,Complex Integer,Expression Complex Integer)
--E

```

And apply the transformation to the difference

```

(*)+≡
--S 142
ee:=atanrule dd
--R
--R
--R          2          2
--R          x  + 2%i a x - a
--R      - %i m x log(-----) - 2%i m x log(-----)
--R          2          2
--R          x  - 2%i a x - a
--R (7)  -----
--R                      4
--R
--R                                          Type: Expression Complex Integer
--E

```

And now we simplify

```

(*)+≡
--S 143      14:505 SCHAUMS AND AXIOM DISAGREE? (branch cuts?)
ff:=expandLog ee
--R
--R          %i m x log(- 1)
--R (8)  - -----
--R          2
--R
--R                                          Type: Expression Complex Integer
--E

```


And we get the surprising result that they are not equal. In fact, they differ by a complex value depending on x . Likely there is a branch-cut issue lurking somewhere.

$$36 \quad [1]:14.506 \quad \int x^m \cot^{-1} \frac{x}{a} dx$$

$$\int x^m \cot^{-1} \frac{x}{a} = \frac{x^{m+1}}{m+1} \cot^{-1} \frac{x}{a} + \frac{a}{m+1} \int \frac{x^{m+1}}{x^2 + a^2}$$

```

(*)+≡
)clear all

--S 144 14:506 Axiom cannot compute this integral
aa:=integrate(x^m*acot(x/a),x)
--R
--R
--R      x
--R      ++      %H  m
--R      (1)  |  acot(--)%H d%H
--R      ++      a
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

```

$$37 \quad [1]:14.507 \quad \int x^m \sec^{-1} \frac{x}{a} dx$$

$$\int x^m \sec^{-1} \frac{x}{a} = \begin{cases} \frac{x^{m+1} \sec^{-1}(x/a)}{m+1} - \frac{a}{m+1} \int \frac{x^m}{\sqrt{x^2 - a^2}} & \text{if } 0 < \sec^{-1} \frac{x}{a} < \frac{\pi}{2} \\ \frac{x^{m+1} \sec^{-1}(x/a)}{m+1} + \frac{a}{m+1} \int \frac{x^m}{\sqrt{x^2 - a^2}} & \text{if } \frac{\pi}{2} < \sec^{-1} \frac{x}{a} < \pi \end{cases}$$

```

(*)+≡
)clear all

--S 145 14:507 Axiom cannot compute this integral
aa:=integrate(x^m*asec(x/a),x)
--R
--R
--R      x
--R      ++      %H  m
--R      (1)  |  asec(--)%H d%H
--R      ++      a
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

```

38 [1]:14.508 $\int x^m \csc^{-1} \frac{x}{a} dx$

$$\int x^m \csc^{-1} \frac{x}{a} = \begin{cases} \frac{x^{m+1} \csc^{-1}(x/a)}{m+1} + \frac{a}{m+1} \int \frac{x^m}{\sqrt{x^2 - a^2}} & \text{if } 0 < \csc^{-1} \frac{x}{a} < \frac{\pi}{2} \\ \frac{x^{m+1} \csc^{-1}(x/a)}{m+1} - \frac{a}{m+1} \int \frac{x^m}{\sqrt{x^2 - a^2}} & \text{if } -\frac{\pi}{2} < \csc^{-1} \frac{x}{a} < 0 \end{cases}$$

`<*>+≡`

`)clear all`

`--S 146 14:508 Axiom cannot compute this integral`

`aa:=integrate(x^m*acsc(x/a),x)`

`--R`

`--R`

`--R`

`--I` x
`--I` $++$ $\%H$ m
`--I` (1) $|$ $\text{acsc}(\frac{x}{a})\%H d\%H$
`--R` $++$ a

`--R`

`Type: Union(Expression Integer,...)`

`--R`

`--E`

`)spool`

`)lisp (bye)`

References

- [1] Spiegel, Murray R. *Mathematical Handbook of Formulas and Tables*
Schaum's Outline Series McGraw-Hill 1968 pp82-84