

\$SPAD/input schaum31.input

Timothy Daly

June 15, 2008

Contents

1	[1]:14.615	$\int \coth ax \, dx$	3
2	[1]:14.616	$\int \coth^2 ax \, dx$	5
3	[1]:14.617	$\int \coth^3 ax \, dx$	6
4	[1]:14.618	$\int \coth^n ax \operatorname{csch}^2 ax \, dx$	9
5	[1]:14.619	$\int \frac{\operatorname{csch}^2 ax}{\coth ax} \, dx$	11
6	[1]:14.620	$\int \frac{dx}{\coth ax} \, dx$	13
7	[1]:14.621	$\int x \coth ax \, dx$	14
8	[1]:14.622	$\int x \coth^2 ax \, dx$	15
9	[1]:14.623	$\int \frac{\coth ax}{x} \, dx$	19
10	[1]:14.624	$\int \frac{dx}{p + q \coth ax} \, dx$	20
11	[1]:14.625	$\int \coth^n ax \, dx$	21

1 [1]:14.615 $\int \coth ax \, dx$

$$\int \coth ax = \frac{1}{a} \ln \sinh ax$$

```

(*)≡
)spool schaum31.output
)set message test on
)set message auto off
)clear all

--S 1
aa:=integrate(coth(a*x),x)
--R
--R
--R          2sinh(a x)
--R    log(- -----) - a x
--R          sinh(a x) - cosh(a x)
--R (1) -----
--R                      a
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 2
bb:=1/a*log(sinh(a*x))
--R
--R    log(sinh(a x))
--R (2) -----
--R          a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 3
cc:=aa-bb
--R
--R          2sinh(a x)
--R    - log(sinh(a x)) + log(- -----) - a x
--R          sinh(a x) - cosh(a x)
--R (3) -----
--R                      a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 4
dd:=expandLog cc
--R

```

```

--R      - log(sinh(a x) - cosh(a x)) + log(- 2) - a x
--R (4) -----
--R                                  a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 5      14:615 Schaums and Axiom differ by a constant
ee:=complexNormalize dd

```

```

--R
--R      - log(- 1) + log(- 2)
--R (5) -----
--R                                  a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

2 [1]:14.616 $\int \coth^2 ax \, dx$

$$\int \coth^2 ax = x - \frac{\coth ax}{a}$$

```
(*)+≡
)clear all
```

```
--S 6
aa:=integrate(coth(a*x)^2,x)
--R
--R
--R      (a x + 1)sinh(a x) - cosh(a x)
--R (1) -----
--R                a sinh(a x)
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E
```

```
--S 7
bb:=x-coth(a*x)/a
--R
--R      - coth(a x) + a x
--R (2) -----
--R                a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E
```

```
--S 8
cc:=aa-bb
--R
--R      (coth(a x) + 1)sinh(a x) - cosh(a x)
--R (3) -----
--R                a sinh(a x)
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E
```

```
--S 9      14:616 Schaums and Axiom differ by a constant
dd:=complexNormalize cc
--R
--R      1
--R (4) -
--R      a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E
```

3 [1]:14.617 $\int \coth^3 ax \, dx$

$$\int \coth^3 ax = \frac{1}{a} \ln \sinh ax - \frac{\coth^2 ax}{2a}$$

```

(*)+≡
)clear all

--S 10
aa:=integrate(coth(a*x)^3,x)
--R
--R
--R (1)
--R      4      3      2      2
--R      sinh(a x) + 4cosh(a x)sinh(a x) + (6cosh(a x) - 2)sinh(a x)
--R      +
--R      3      4      2
--R      (4cosh(a x) - 4cosh(a x))sinh(a x) + cosh(a x) - 2cosh(a x) + 1
--R      *
--R      2sinh(a x)
--R      log(- -----)
--R      sinh(a x) - cosh(a x)
--R      +
--R      4      3
--R      - a x sinh(a x) - 4a x cosh(a x)sinh(a x)
--R      +
--R      2      2
--R      (- 6a x cosh(a x) + 2a x - 2)sinh(a x)
--R      +
--R      3      4
--R      (- 4a x cosh(a x) + (4a x - 4)cosh(a x))sinh(a x) - a x cosh(a x)
--R      +
--R      2
--R      (2a x - 2)cosh(a x) - a x
--R      /
--R      4      3      2      2
--R      a sinh(a x) + 4a cosh(a x)sinh(a x) + (6a cosh(a x) - 2a)sinh(a x)
--R      +
--R      3      4      2
--R      (4a cosh(a x) - 4a cosh(a x))sinh(a x) + a cosh(a x) - 2a cosh(a x) + a
--R
--R      Type: Union(Expression Integer,...)
--E

```

```

--S 11
bb:=1/a*log(sinh(a*x)-coth(a*x)^2)/(2*a)
--R

```

```

--R
--R          2
--R    log(sinh(a x) - coth(a x) )
--R (2) -----
--R          2
--R         2a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

--S 12 14:617 Axiom cannot simplify this expression

cc:=aa-bb

```

--R
--R (3)
--R          4          3          2          2
--R    - sinh(a x) - 4cosh(a x)sinh(a x) + (- 6cosh(a x) + 2)sinh(a x)
--R +
--R          3          4          2
--R    (- 4cosh(a x) + 4cosh(a x))sinh(a x) - cosh(a x) + 2cosh(a x) - 1
--R *
--R          2
--R    log(sinh(a x) - coth(a x) )
--R +
--R          4          3
--R    2a sinh(a x) + 8a cosh(a x)sinh(a x)
--R +
--R          2          2
--R    (12a cosh(a x) - 4a)sinh(a x)
--R +
--R          3          4
--R    (8a cosh(a x) - 8a cosh(a x))sinh(a x) + 2a cosh(a x)
--R +
--R          2
--R    - 4a cosh(a x) + 2a
--R *
--R          2sinh(a x)
--R    log(- -----)
--R          sinh(a x) - cosh(a x)
--R +
--R          2          4          2          3
--R    - 2a x sinh(a x) - 8a x cosh(a x)sinh(a x)
--R +
--R          2          2          2          2
--R    (- 12a x cosh(a x) + 4a x - 4a)sinh(a x)
--R +
--R          2          3          2          2          4
--R    (- 8a x cosh(a x) + (8a x - 8a)cosh(a x))sinh(a x) - 2a x cosh(a x)
--R +

```

```

--R      2      2      2
--R      (4a x - 4a)cosh(a x) - 2a x
--R /
--R      2      4      2      3      2      2      2      2
--R      2a sinh(a x) + 8a cosh(a x)sinh(a x) + (12a cosh(a x) - 4a )sinh(a x)
--R +
--R      2      3      2      2      4      2      2
--R      (8a cosh(a x) - 8a cosh(a x))sinh(a x) + 2a cosh(a x) - 4a cosh(a x)
--R +
--R      2
--R      2a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```


4 [1]:14.618 $\int \coth^n ax \operatorname{csch}^2 ax \, dx$

$$\int \coth^n ax \operatorname{csch}^2 ax = -\frac{\coth^{n+1} ax}{(n+1)a}$$

```
(*)+=
)clear all
```

```
--S 13
```

```
aa:=integrate(coth(a*x)^n*csch(a*x)^2,x)
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R          cosh(a x)          cosh(a x)
--R      - cosh(a x)sinh(n log(-----)) - cosh(a x)cosh(n log(-----))
--R                                sinh(a x)                                sinh(a x)
```

```
--R (1) -----
```

```
--R                                (a n + a)sinh(a x)
```

```
--R                                Type: Union(Expression Integer,...)
```

```
--E
```

```
--S 14
```

```
bb:=-coth(a*x)^(n+1)/((n+1)*a)
```

```
--R
```

```
--R          n + 1
--R      coth(a x)
```

```
--R (2) - -----
```

```
--R          a n + a
```

```
--R
```

```
Type: Expression Integer
```

```
--E
```

```
--S 15
```

```
cc:=aa-bb
```

```
--R
```

```
--R (3)
```

```
--R          cosh(a x)          cosh(a x)
--R      - cosh(a x)sinh(n log(-----)) - cosh(a x)cosh(n log(-----))
--R                                sinh(a x)                                sinh(a x)
```

```
--R      +
```

```
--R          n + 1
--R      sinh(a x)coth(a x)
```

```
--R /
```

```
--R      (a n + a)sinh(a x)
```

```
--R
```

```
Type: Expression Integer
```

```
--E
```

```
--S 16
```

```

dd:=expandLog cc
--R
--R (4)
--R      cosh(a x)sinh(n log(sinh(a x)) - n log(cosh(a x)))
--R      +
--R      - cosh(a x)cosh(n log(sinh(a x)) - n log(cosh(a x)))
--R      +
--R      sinh(a x)coth(a x)
--R      /
--R      (a n + a)sinh(a x)
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 17      14:618 Schaums and Axiom agree
ee:=complexNormalize dd
--R
--R (5)  0
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

5 [1]:14.619 $\int \frac{\operatorname{csch}^2 ax}{\operatorname{coth} ax} dx$

$$\int \frac{\operatorname{csch}^2 ax}{\operatorname{coth} ax} = -\frac{1}{a} \ln \operatorname{coth} ax$$

```
(*)+=
)clear all
```

```
--S 18
aa:=integrate(csch(a*x)^2/coth(a*x),x)
--R
--R
--R              2cosh(a x)              2sinh(a x)
--R      - log(- -----) + log(- -----)
--R              sinh(a x) - cosh(a x)      sinh(a x) - cosh(a x)
--R (1) -----
--R                                          a
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E
```

```
--S 19
bb:=-1/a*log(coth(a*x))
--R
--R      log(coth(a x))
--R (2) - -----
--R              a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E
```

```
--S 20
cc:=aa-bb
--R
--R (3)
--R              2cosh(a x)              2sinh(a x)
--R      log(coth(a x)) - log(- -----) + log(- -----)
--R              sinh(a x) - cosh(a x)      sinh(a x) - cosh(a x)
--R -----
--R                                          a
--R                                          Type: Expression Integer
--E
```

```
--S 21
dd:=expandLog cc
--R
--R      log(sinh(a x)) + log(coth(a x)) - log(cosh(a x))
```

```

--R (4) -----
--R                                     a
--R                                     Type: Expression Integer
--E

--S 22      14:619 Schaums and Axiom agree
ee:=complexNormalize dd
--R
--R (5)  0
--R                                     Type: Expression Integer
--E

```

6 [1]:14.620 $\int \frac{dx}{\coth ax} dx$
 $\int \frac{1}{\coth ax} = \frac{1}{a} \ln \cosh ax$

<*)+≡
)clear all

```
--S 23
aa:=integrate(1/coth(a*x),x)
--R
--R
--R          2cosh(a x)
--R    log(- ----) - a x
--R          sinh(a x) - cosh(a x)
--R (1) -----
--R                      a
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E
```

```
--S 24
bb:=1/a*log(cosh(a*x))
--R
--R    log(cosh(a x))
--R (2) -----
--R          a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E
```

```
--S 25
cc:=aa-bb
--R
--R          2cosh(a x)
--R    - log(cosh(a x)) + log(- ----) - a x
--R          sinh(a x) - cosh(a x)
--R (3) -----
--R                      a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E
```

```
--S 26
dd:=expandLog cc
--R
--R    - log(sinh(a x) - cosh(a x)) + log(- 2) - a x
--R (4) -----
```


8 [1]:14.622 $\int x \coth^2 ax \, dx$

$$\int x \coth^2 ax = \frac{x^2}{2} - \frac{x \coth ax}{a} + \frac{1}{a^2} \ln \sinh ax$$

```

(*)+≡
)clear all

--S 29
aa:=integrate(x*coth(a*x)^2,x)
--R
--R
--R (1)
--R
--R      2
--R      (2sinh(a x) + 4cosh(a x)sinh(a x) + 2cosh(a x) - 2)
--R      *
--R      2sinh(a x)
--R      log(- -----)
--R      sinh(a x) - cosh(a x)
--R      +
--R      2 2      2      2 2
--R      (a x - 4a x)sinh(a x) + (2a x - 8a x)cosh(a x)sinh(a x)
--R      +
--R      2 2      2      2 2
--R      (a x - 4a x)cosh(a x) - a x
--R      /
--R      2      2      2      2      2      2
--R      2a sinh(a x) + 4a cosh(a x)sinh(a x) + 2a cosh(a x) - 2a
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 30
bb:=x^2/2-(x*coth(a*x)/a)+1/a^2*log(sinh(a*x))
--R
--R
--R      2 2
--R      2log(sinh(a x)) - 2a x coth(a x) + a x
--R (2) -----
--R      2
--R      2a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 31
cc:=aa-bb
--R
--R (3)

```

```

--R      2      2
--R      (- sinh(a x)  - 2cosh(a x)sinh(a x) - cosh(a x)  + 1)log(sinh(a x))
--R      +
--R      2      2
--R      (sinh(a x)  + 2cosh(a x)sinh(a x) + cosh(a x)  - 1)
--R      *
--R      2sinh(a x)
--R      log(- -----)
--R      sinh(a x) - cosh(a x)
--R      +
--R      2
--R      (a x coth(a x) - 2a x)sinh(a x)
--R      +
--R      (2a x cosh(a x)coth(a x) - 4a x cosh(a x))sinh(a x)
--R      +
--R      2      2
--R      (a x cosh(a x)  - a x)coth(a x) - 2a x cosh(a x)
--R      /
--R      2      2      2      2      2      2
--R      a sinh(a x)  + 2a cosh(a x)sinh(a x) + a cosh(a x)  - a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

--S 32

dd:=expandLog cc

```

--R
--R      (4)
--R      2      2
--R      (- sinh(a x)  - 2cosh(a x)sinh(a x) - cosh(a x)  + 1)
--R      *
--R      log(sinh(a x) - cosh(a x))
--R      +
--R      2
--R      (a x coth(a x) + log(- 2) - 2a x)sinh(a x)
--R      +
--R      (2a x cosh(a x)coth(a x) + (2log(- 2) - 4a x)cosh(a x))sinh(a x)
--R      +
--R      2      2
--R      (a x cosh(a x)  - a x)coth(a x) + (log(- 2) - 2a x)cosh(a x)  - log(- 2)
--R      /
--R      2      2      2      2      2      2
--R      a sinh(a x)  + 2a cosh(a x)sinh(a x) + a cosh(a x)  - a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

--S 33


```

sinhsqrrule:=rule(sinh(x)^2 == 1/2*cosh(2*x)-1/2)
--R
--R      2      cosh(2x) - 1
--R (5)  sinh(x) == -----
--R                    2
--R                                     Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 34
ee:=sinhsqrrule dd
--R
--R (6)
--R
--R      2
--R      (- 4cosh(a x)sinh(a x) - cosh(2a x) - 2cosh(a x) + 3)
--R *
--R      log(sinh(a x) - cosh(a x))
--R +
--R      (4a x cosh(a x)coth(a x) + (4log(- 2) - 8a x)cosh(a x))sinh(a x)
--R +
--R      2
--R      (a x cosh(2a x) + 2a x cosh(a x) - 3a x)coth(a x)
--R +
--R      2
--R      (log(- 2) - 2a x)cosh(2a x) + (2log(- 2) - 4a x)cosh(a x) - 3log(- 2)
--R +
--R      2a x
--R /
--R      2      2      2      2      2
--R      4a cosh(a x)sinh(a x) + a cosh(2a x) + 2a cosh(a x) - 3a
--R                                     Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 35
coshsqrrule:=rule(cosh(x)^2 == 1/2*cosh(2*x)+1/2)
--R
--R      2      cosh(2x) + 1
--R (7)  cosh(x) == -----
--R                    2
--R                                     Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 36
ff:=coshsqrrule ee
--R
--R (8)
--R      (- 2cosh(a x)sinh(a x) - cosh(2a x) + 1)log(sinh(a x) - cosh(a x))

```

```

--R      +
--R      (2a x cosh(a x)coth(a x) + (2log(- 2) - 4a x)cosh(a x))sinh(a x)
--R      +
--R      (a x cosh(2a x) - a x)coth(a x) + (log(- 2) - 2a x)cosh(2a x) - log(- 2)
--R      /
--R      2          2          2
--R      2a cosh(a x)sinh(a x) + a cosh(2a x) - a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 37
sinhcoshrule:=rule(sinh(x)*cosh(y) == 1/2*(sinh(x+y)+sinh(x-y)))
--R
--R                                          %L sinh(y + x) - %L sinh(y - x)
--R      (9) %L cosh(y)sinh(x) == -----
--R                                          2
--R
--R                                          Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 38
gg:=sinhcoshrule ff
--R
--R      (10)
--R      (- sinh(2a x) - cosh(2a x) + 1)log(sinh(a x) - cosh(a x))
--R      +
--R      (a x coth(a x) + log(- 2) - 2a x)sinh(2a x)
--R      +
--R      (a x cosh(2a x) - a x)coth(a x) + (log(- 2) - 2a x)cosh(2a x) - log(- 2)
--R      /
--R      2          2          2
--R      a sinh(2a x) + a cosh(2a x) - a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 39      14:622 Schaums and Axiom differ by a constant
hh:=complexNormalize gg
--R
--R      - log(- 1) + log(- 2)
--R      (11) -----
--R              2
--R             a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

9 [1]:14.623 $\int \frac{\coth ax}{x} dx$

$$\int \frac{\coth ax}{x} = -\frac{1}{ax} + \frac{(ax)}{3} - \frac{(ax)^3}{135} + \dots - \frac{(-1)^n 2^{2n} B_n (ax)^{2n-1}}{(2n-1)(2n)!} + \dots$$

```
(*)+≡
)clear all
```

```
--S 40      14:623 Axiom cannot compute this integral
aa:=integrate(coth(a*x)/x,x)
```

```
--R
--R
--R      x
--R      ++ coth(%0 a)
--R (1) | ----- d%0
--R      ++      %0
```

Type: Union(Expression Integer,...)

```
--E
```

10 [1]:14.624 $\int \frac{dx}{p + q \coth ax} dx$

$$\int \frac{1}{p + q \coth ax} = \frac{px}{p^2 - q^2} - \frac{q}{a(p^2 - q^2)} \ln(p \sinh ax + q \cosh ax)$$

```

(*)+≡
)clear all

--S 41
aa:=integrate(1/(p+q*coth(a*x)),x)
--R
--R
--R      - 2p sinh(a x) - 2q cosh(a x)
--R      q log(-----) + (- a q - a p)x
--R      sinh(a x) - cosh(a x)
--R (1) -----
--R      2      2
--R      a q  - a p
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 42
bb:=(p*x)/(p^2-q^2)-q/(a*(p^2-q^2))*log(p*sinh(a*x)+q*cosh(a*x))
--R
--R      q log(p sinh(a x) + q cosh(a x)) - a p x
--R (2) -----
--R      2      2
--R      a q  - a p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 43
cc:=aa-bb
--R
--R (3)
--R      - 2p sinh(a x) - 2q cosh(a x)
--R      - q log(p sinh(a x) + q cosh(a x)) + q log(-----)
--R      sinh(a x) - cosh(a x)
--R
--R      +
--R      - a q x
--R /
--R      2      2
--R      a q  - a p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 44
dd:=expandLog cc
--R
--R (4)
--R      - q log(p sinh(a x) + q cosh(a x)) - q log(sinh(a x) - cosh(a x))
--R      +
--R      q log(- p sinh(a x) - q cosh(a x)) + q log(2) - a q x
--R /
--R      2      2
--R      a q  - a p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 45      14:624 Schaums and Axiom differ by a constant
ee:=complexNormalize dd
--R
--R      q log(2) - 2q log(- 1)
--R (5) -----
--R      2      2
--R      a q  - a p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

11 [1]:14.625 $\int \coth^n ax \, dx$

$$\int \coth^n ax = -\frac{\coth^{n-1} ax}{a(n-1)} + \int \coth^{n-1} ax$$

```

(*)+=
)clear all

```

```

--S 46      14:625 Axiom cannot compute this integral
aa:=integrate(coth(a*x)^n,x)
--R
--R
--R      x
--R      ++      n
--R (1) | coth(%0 a) d%0
--R      ++
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

```

```

)spool
)lisp (bye)

```

References

- [1] Spiegel, Murray R. *Mathematical Handbook of Formulas and Tables*
Schaum's Outline Series McGraw-Hill 1968 pp90-91