

\$SPAD/input schaum8.input

Timothy Daly

June 15, 2008

Contents

1	[1]:14.163	$\int \frac{dx}{a^2 - x^2}$	3
2	[1]:14.164	$\int \frac{x dx}{a^2 - x^2}$	5
3	[1]:14.165	$\int \frac{x^2 dx}{a^2 - x^2}$	7
4	[1]:14.166	$\int \frac{x^3 dx}{a^2 - x^2}$	9
5	[1]:14.167	$\int \frac{dx}{x(a^2 - x^2)}$	11
6	[1]:14.168	$\int \frac{dx}{x^2(a^2 - x^2)}$	13
7	[1]:14.169	$\int \frac{dx}{x^3(a^2 - x^2)}$	15
8	[1]:14.170	$\int \frac{dx}{(a^2 - x^2)^2}$	17
9	[1]:14.171	$\int \frac{x dx}{(a^2 - x^2)^2}$	19
10	[1]:14.172	$\int \frac{x^2 dx}{(a^2 - x^2)^2}$	20
11	[1]:14.173	$\int \frac{x^3 dx}{(a^2 - x^2)^2}$	22
12	[1]:14.174	$\int \frac{dx}{x(a^2 - x^2)^2}$	24
13	[1]:14.175	$\int \frac{dx}{x^2(a^2 - x^2)^2}$	26
14	[1]:14.176	$\int \frac{dx}{x^3(a^2 - x^2)^2}$	28
15	[1]:14.177	$\int \frac{dx}{(a^2 - x^2)^n}$	30

16 [1]:14.178	$\int \frac{x dx}{(a^2 - x^2)^n}$	31
17 [1]:14.179	$\int \frac{dx}{x(a^2 - x^2)^n}$	32
18 [1]:14.180	$\int \frac{x^m dx}{(a^2 - x^2)^n}$	33
19 [1]:14.181	$\int \frac{dx}{x^m(a^2 - x^2)^n}$	33

1 [1]:14.163 $\int \frac{dx}{a^2 - x^2}$

$$\int \frac{1}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left(\frac{a-x}{a+x} \right)$$

$$\int \frac{1}{a^2 - x^2} = -\frac{1}{a} \coth^{-1} \frac{x}{a}$$

```

(*)≡
)spool schaum8.output
)set message test on
)set message auto off
)clear all

--S 1
aa:=integrate(1/(a^2-x^2),x)
--R
--R
--R      log(x + a) - log(x - a)
--R (1) -----
--R              2a
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 2
bb:=1/(2*a)*log((a+x)/(a-x))
--R
--R      - x - a
--R      log(-----)
--R              x - a
--R (2) -----
--R              2a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 3
cc:=aa-bb
--R
--R      - x - a
--R      log(x + a) - log(x - a) - log(-----)
--R                                          x - a
--R (3) -----
--R                                          2a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 4
divlog:=rule(log(a/b) == log(a) - log(b))
--R
--R      a
--R (4) log(-) == - log(b) + log(a)
--R      b
--R
--R                                     Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 5
dd:=divlog cc
--R
--R      log(x + a) - log(- x - a)
--R (5) -----
--R                      2a
--R
--R                                     Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 6
logminus:=rule(log(x + a) - log(- x - a) == log(-1))
--R
--R (6) log(x + a) - log(- x - a) + %I == log(- 1) + %I
--R
--R                                     Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 7      14:163 Schaums and Axiom differ by a constant
ee:=logminus dd
--R
--R      log(- 1)
--R (7) -----
--R          2a
--R
--R                                     Type: Expression Integer
--E

```

2 [1]:14.164 $\int \frac{x dx}{a^2 - x^2}$

$$\int \frac{x}{a^2 - x^2} = -\frac{1}{2} \ln(a^2 - x^2)$$

```

(*)+=
)clear all

--S 8
aa:=integrate(x/(a^2-x^2),x)
--R
--R
--R      2      2
--R      log(x  - a )
--R (1)  -----
--R      2
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 9
bb:=-1/2*log(a^2-x^2)
--R
--R      2      2
--R      log(- x  + a )
--R (2)  -----
--R      2
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 10
cc:=aa-bb
--R
--R      2      2      2      2
--R      - log(x  - a ) + log(- x  + a )
--R (3)  -----
--R      2
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 11
logminus1:=rule(-log(x^2-a^2)+log(-x^2+a^2) == log(-1))
--R
--R      2      2      2      2
--R      - log(x  - a ) + log(- x  + a ) + %H == log(- 1) + %H
--R (4)
--R                                          Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)

```

--E

--S 12 14:164 Schaums and Axiom differ by a constant

dd:=logminus1 cc

--R

--R log(- 1)

--R (5) -----

--R 2

--R

Type: Expression Integer

--E

3 [1]:14.165 $\int \frac{x^2 dx}{a^2 - x^2}$

$$\int \frac{x^2}{a^2 - x^2} = -x + \frac{a}{2} \ln \left(\frac{a+x}{a-x} \right)$$

```
(*)+=
)clear all
```

```
--S 13
```

```
aa:=integrate(x^2/(a^2-x^2),x)
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R      a log(x + a) - a log(x - a) - 2x
```

```
--R (1) -----
```

```
--R                               2
```

```
--R
```

```
Type: Union(Expression Integer,...)
```

```
--E
```

```
--S 14
```

```
bb:=-x+a/2*log((a+x)/(a-x))
```

```
--R
```

```
--R      - x - a
```

```
--R      a log(-----) - 2x
```

```
--R              x - a
```

```
--R (2) -----
```

```
--R                               2
```

```
--R
```

```
Type: Expression Integer
```

```
--E
```

```
--S 15
```

```
cc:=aa-bb
```

```
--R
```

```
--R      - x - a
```

```
--R      a log(x + a) - a log(x - a) - a log(-----)
```

```
--R              x - a
```

```
--R (3) -----
```

```
--R                               2
```

```
--R
```

```
Type: Expression Integer
```

```
--E
```

```
--S 16
```

```
divlog:=rule(log(a/b) == log(a) - log(b))
```

```
--R
```

```
--R      a
```

```
--R (4) log(-) == - log(b) + log(a)
```

```

--R          b
--R                                     Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 17
dd:=divlog cc
--R
--R          a log(x + a) - a log(- x - a)
--R (5) -----
--R                                 2
--R
--R                                     Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 18
logminusa:=rule(b*log(x + a) - b*log(- x - a) == b*log(-1))
--R
--R (6) b log(x + a) - b log(- x - a) + %M == b log(- 1) + %M
--R                                     Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 19      14:165 Schaums and Axiom differ by a constant
ee:=logminusa dd
--R
--R          a log(- 1)
--R (7) -----
--R                                 2
--R
--R                                     Type: Expression Integer
--E

```

4 [1]:14.166 $\int \frac{x^3 dx}{a^2 - x^2}$

$$\int \frac{x^3}{a^2 - x^2} = -\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{2} \ln(a^2 - x^2)$$

```
(*)+=
)clear all
```

```
--S 20
aa:=integrate(x^3/(a^2-x^2),x)
--R
--R
--R      2      2      2      2
--R      - a log(x  - a ) - x
--R (1) -----
--R      2
```

Type: Union(Expression Integer,...)

```
--S 21
bb:=-x^2/2-a^2/2*log(a^2-x^2)
--R
--R      2      2      2      2
--R      - a log(- x  + a ) - x
--R (2) -----
--R      2
```

Type: Expression Integer

```
--S 22
cc:=aa-bb
--R
--R      2      2      2      2      2      2
--R      - a log(x  - a ) + a log(- x  + a )
--R (3) -----
--R      2
```

Type: Expression Integer

```
--S 23
logminus1b:=rule(-b*log(x^2-a^2)+b*log(-x^2+a^2) == b*log(-1))
--R
--R      2      2      2      2
--R      - b log(x  - a ) + b log(- x  + a ) + %N == b log(- 1) + %N
--R (4) -----
--R      Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
```

--E

--S 24 14:166 Schaums and Axiom differ by a constant
dd:=logminus1b cc

--R

--R

--R $a \log(-1)$

--R (5) -----

--R

--R

--R

Type: Expression Integer

--E

5 [1]:14.167 $\int \frac{dx}{x(a^2 - x^2)}$

$$\int \frac{1}{x(a^2 - x^2)} = \frac{1}{2a^2} \ln \left(\frac{x^2}{a^2 - x^2} \right)$$

```
(*)+=
)clear all
```

```
--S 25
aa:=integrate(1/(x*(a^2-x^2)),x)
```

```
--R
--R
--R      2      2
--R      - log(x  - a ) + 2log(x)
--R (1) -----
--R      2
--R      2a
```

Type: Union(Expression Integer,...)

```
--S 26
bb:=1/(2*a^2)*log(x^2/(a^2-x^2))
```

```
--R
--R      2
--R      x
--R      log(- ----)
--R      2      2
--R      x  - a
--R (2) -----
--R      2
--R      2a
```

Type: Expression Integer

```
--S 27
cc:=aa-bb
```

```
--R
--R      2      2      2
--R      - log(x  - a ) + 2log(x) - log(- ----)
--R      2      2
--R      x  - a
--R (3) -----
--R      2
--R      2a
```

--R
 --R Type: Expression Integer
 --E

--S 28
 divlog:=rule(log(a/b) == log(a) - log(b))
 --R
 --R a
 --R (4) $\log\left(\frac{a}{b}\right) == -\log(b) + \log(a)$
 --R b
 --R Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
 --E

--S 29
 dd:=divlog cc
 --R
 --R 2
 --R $2\log(x) - \log(-x^2)$
 --R (5) -----
 --R 2
 --R 2a
 --R
 --R Type: Expression Integer
 --E

--S 30
 logpowminus:=rule(log(-a^n) == n*log(a)+log(-1))
 --R
 --R n
 --R (6) $\log(-a^n) == n \log(a) + \log(-1)$
 --R Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
 --E

--S 31 14:167 Schaums and Axiom differ by a constant
 ee:=logpowminus dd
 --R
 --R log(-1)
 --R (7) -----
 --R 2
 --R 2a
 --R
 --R Type: Expression Integer
 --E

6 [1]:14.168 $\int \frac{dx}{x^2(a^2 - x^2)}$

$$\int \frac{1}{x^2(a^2 - x^2)} = \frac{1}{a^2x} + \frac{1}{2a^3} \ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right)$$

```

(*)+≡
)clear all

--S 32
aa:=integrate(1/(x^2*(a^2-x^2)),x)
--R
--R
--R      x log(x + a) - x log(x - a) - 2a
--R (1) -----
--R              3
--R           2a x
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 33
bb:=-1/(a^2*x)+1/(2*a^3)*log((a+x)/(a-x))
--R
--R      - x - a
--R      x log(-----) - 2a
--R              x - a
--R (2) -----
--R              3
--R           2a x
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 34
cc:=aa-bb
--R
--R      - x - a
--R      log(x + a) - log(x - a) - log(-----)
--R                                  x - a
--R (3) -----
--R              3
--R           2a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 35
divlog:=rule(log(a/b) == log(a) - log(b))

```

```

--R
--R
--R      a
--R      (4)  log(-) == - log(b) + log(a)
--R          b
--R
--R                                     Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 36
dd:=divlog cc
--R
--R      log(x + a) - log(- x - a)
--R      (5)  -----
--R                    3
--R                 2a
--R
--R                                     Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 37
logminus:=rule(log(x + a) - log(- x - a) == log(-1))
--R
--R      (6)  log(x + a) - log(- x - a) + %0 == log(- 1) + %0
--R
--R                                     Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 38      14:168 Schaums and Axiom differ by a constant
ee:=logminus dd
--R
--R      log(- 1)
--R      (7)  -----
--R            3
--R           2a
--R
--R                                     Type: Expression Integer
--E

```

7 [1]:14.169 $\int \frac{dx}{x^3(a^2 - x^2)}$

$$\int \frac{1}{x^3(a^2 - x^2)} = -\frac{1}{2a^2x^2} + \frac{1}{2a^4} \ln\left(\frac{x^2}{a^2 - x^2}\right)$$

```
(*)+=
)clear all
```

```
--S 39
```

```
aa:=integrate(1/(x^3*(a^2-x^2)),x)
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R      2      2      2      2      2
--R      - x log(x  - a ) + 2x log(x) - a
```

```
--R (1) -----
```

```
--R      4 2
--R      2a x
```

```
Type: Union(Expression Integer,...)
```

```
--E
```

```
--S 40
```

```
bb:=-1/(2*a^2*x^2)+1/(2*a^4)*log(x^2/(a^2-x^2))
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R      2
--R      x
--R      x log(- ----) - a
```

```
--R      2 2
--R      x - a
```

```
--R (2) -----
```

```
--R      4 2
--R      2a x
```

```
Type: Expression Integer
```

```
--E
```

```
--S 41
```

```
divlog:=rule(log(a/b) == log(a) - log(b))
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R      a
--R (3) log(-) == - log(b) + log(a)
--R      b
```

```
Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
```

```
--E
```

```
--S 42
```

```
bb1:=divlog bb
```

```

--R
--R      2      2      2      2      2      2
--R      - x log(x  - a ) + x log(- x ) - a
--R (4) -----
--R              4 2
--R             2a x
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 43
cc:=aa-bb1
--R
--R              2
--R      2log(x) - log(- x )
--R (5) -----
--R              4
--R             2a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 44
logminuspow:=rule(log(-x^n) == n*log(x)+log(-1))
--R
--R      n
--R (6) log(- x ) == n log(x) + log(- 1)
--R
--R                                          Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 45      14:169 Schaums and Axiom differ by a constant
dd:=logminuspow cc
--R
--R      log(- 1)
--R (7) -----
--R              4
--R             2a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

8 [1]:14.170 $\int \frac{dx}{(a^2 - x^2)^2}$

$$\int \frac{1}{(a^2 - x^2)^2} = \frac{x}{2a^2(a^2 - x^2)} + \frac{1}{4a^3} \ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right)$$

```
(*)+=
)clear all
```

```
--S 46
```

```
aa:=integrate(1/((a^2-x^2)^2),x)
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R      2      2      2      2
--R      (x  - a )log(x + a) + (- x  + a )log(x - a) - 2a x
--R (1) -----
--R                                 3 2      5
--R                               4a x  - 4a
```

```
Type: Union(Expression Integer,...)
```

```
--E
```

```
--S 47
```

```
bb:=x/(2*a^2*(a^2-x^2))+1/(4*a^3)*log((a+x)/(a-x))
```

```
--R
```

```
--R      2      2      - x - a
--R      (x  - a )log(-----) - 2a x
--R                      x - a
--R (2) -----
--R                      3 2      5
--R                    4a x  - 4a
```

```
Type: Expression Integer
```

```
--E
```

```
--S 48
```

```
divlog:=rule(log(a/b) == log(a) - log(b))
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R (3) log(-) == - log(b) + log(a)
--R      b
```

```
Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
```

```
--E
```

```
--S 49
```

```
bb1:=divlog bb
```

```
--R
```

```
--R      2      2      2      2
```

```

--R      (- x + a )log(x - a) + (x - a )log(- x - a) - 2a x
--R (4) -----
--R                      3 2      5
--R                    4a x  - 4a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 50
cc:=aa-bb1
--R
--R      log(x + a) - log(- x - a)
--R (5) -----
--R                      3
--R                    4a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 51
logminus:=rule(log(x + a) - log(- x - a) == log(-1))
--R
--R (6) log(x + a) - log(- x - a) + %P == log(- 1) + %P
--R                                          Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 52      14:170 Schaums and Axiom differ by a constant
dd:=logminus cc
--R
--R      log(- 1)
--R (7) -----
--R          3
--R        4a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

9 [1]:14.171 $\int \frac{x dx}{(a^2 - x^2)^2}$

$$\int \frac{x}{(a^2 - x^2)^2} = \frac{1}{2(a^2 - x^2)}$$

```

(*)+=
)clear all

--S 53
aa:=integrate(x/((a^2-x^2)^2),x)
--R
--R
--R
--R      1
--R (1)  - ----
--R      2      2
--R     2x  - 2a
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 54
bb:=1/(2*(a^2-x^2))
--R
--R
--R      1
--R (2)  - ----
--R      2      2
--R     2x  - 2a
--R
--R                                          Type: Fraction Polynomial Integer
--E

--S 55      14:171 Schaums and Axiom agree
cc:=aa-bb
--R
--R
--R (3)  0
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

10 [1]:14.172 $\int \frac{x^2 dx}{(a^2 - x^2)^2}$

$$\int \frac{x^2}{(a^2 - x^2)^2} = \frac{x}{2(a^2 - x^2)} - \frac{1}{4a} \ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right)$$

```
(*)+=
)clear all
```

```
--S 56
```

```
aa:=integrate(x^2/((a^2-x^2)^2),x)
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R      2      2      2      2
--R      (- x  + a )log(x + a) + (x  - a )log(x - a) - 2a x
--R (1) -----
```

```
--R      2      3
--R      4a x  - 4a
```

```
Type: Union(Expression Integer,...)
```

```
--E
```

```
--S 57
```

```
bb:=x/(2*(a^2-x^2))-1/(4*a)*log((a+x)/(a-x))
```

```
--R
```

```
--R      2      2      - x - a
--R      (- x  + a )log(-----) - 2a x
--R      x - a
```

```
--R (2) -----
```

```
--R      2      3
--R      4a x  - 4a
```

```
Type: Expression Integer
```

```
--E
```

```
--S 58
```

```
divlog:=rule(log(a/b) == log(a) - log(b))
```

```
--R
```

```
--R      a
--R (3) log(-) == - log(b) + log(a)
--R      b
```

```
Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
```

```
--E
```

```
--S 59
```

```
bb1:=divlog bb
```

```
--R
```

```
--R      2      2      2      2
```

```

--R      (x - a)log(x - a) + (- x + a)log(- x - a) - 2a x
--R (4) -----
--R                      2      3
--R                    4a x  - 4a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 60
cc:=aa-bb1
--R
--R      - log(x + a) + log(- x - a)
--R (5) -----
--R                      4a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 61
logminus2:=rule(-log(x + a) + log(- x - a) == log(-1))
--R
--I (6) - log(x + a) + log(- x - a) + %S == log(- 1) + %S
--R                                          Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 62      14:172 Schaums and Axiom differ by a constant
dd:=logminus2 cc
--R
--R      log(- 1)
--R (7) -----
--R      4a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

11 [1]:14.173 $\int \frac{x^3 dx}{(a^2 - x^2)^2}$

$$\int \frac{x^3}{(a^2 - x^2)^2} = \frac{a^2}{2(a^2 - x^2)} + \frac{1}{2} \ln(a^2 - x^2)$$

```
(*)+=
)clear all
```

```
--S 63
```

```
aa:=integrate(x^3/((a^2-x^2)^2),x)
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R      2      2      2      2      2
--R      (x  - a )log(x  - a ) - a
```

```
--R (1) -----
```

```
--R      2      2
--R      2x  - 2a
```

```
--R
```

```
--E
```

Type: Union(Expression Integer,...)

```
--S 64
```

```
bb:=a^2/(2*(a^2-x^2))+1/2*log(a^2-x^2)
```

```
--R
```

```
--R      2      2      2      2      2
--R      (x  - a )log(- x  + a ) - a
```

```
--R (2) -----
```

```
--R      2      2
--R      2x  - 2a
```

```
--R
```

```
--E
```

Type: Expression Integer

```
--S 65
```

```
cc:=aa-bb
```

```
--R
```

```
--R      2      2      2      2
--R      log(x  - a ) - log(- x  + a )
```

```
--R (3) -----
```

```
--R      2
```

```
--R
```

```
--E
```

Type: Expression Integer

```
--S 66
```

```
logminus3:=rule(log(x^2-a^2)-log(-x^2+a^2) == log(-1))
```

```
--R
```

```
--R      2      2      2      2
```

```

--I (4)  $\log(x - a) - \log(-x + a) + \%T == \log(-1) + \%T$ 
--R                                         Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

--S 67      14:173 Schaums and Axiom differ by a constant
dd:=logminus3 cc
--R
--R       $\log(-1)$ 
--R (5) -----
--R           2
--R
--R                                         Type: Expression Integer
--E

```

12 [1]:14.174 $\int \frac{dx}{x(a^2 - x^2)^2}$

$$\int \frac{1}{x(a^2 - x^2)^2} = \frac{1}{2a^2(a^2 - x^2)} + \frac{1}{2a^4} \ln\left(\frac{x^2}{a^2 - x^2}\right)$$

```
(*)+=
)clear all
```

```
--S 68
```

```
aa:=integrate(1/(x*(a^2-x^2)^2),x)
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R      2 2      2 2      2 2      2 2      2 2      2 2      2 2
--R      (- x + a )log(x - a ) + (2x - 2a )log(x) - a
```

```
--R (1) -----
```

```
--R      4 2      6
--R      2a x - 2a
```

```
--R
```

```
Type: Union(Expression Integer,...)
```

```
--E
```

```
--S 69
```

```
bb:=1/(2*a^2*(a^2-x^2))+1/(2*a^4)*log(x^2/(a^2-x^2))
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R      2
--R      x
--R      (x - a )log(- ----) - a
```

```
--R      2 2
--R      x - a
```

```
--R (2) -----
```

```
--R      4 2      6
--R      2a x - 2a
```

```
--R
```

```
Type: Expression Integer
```

```
--E
```

```
--S 70
```

```
divlog:=rule(log(a/b) == log(a) - log(b))
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R      a
--R (3) log(-) == - log(b) + log(a)
```

```
--R      b
```

```
--R
```

```
Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
```

```
--E
```

```
--S 71
```

```
bb1:=divlog bb
```

```

--R
--R      2 2      2 2      2 2      2 2
--R      (- x + a )log(x - a ) + (x - a )log(- x ) - a
--R (4) -----
--R                      4 2      6
--R                    2a x - 2a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 72
cc:=aa-bb1
--R
--R      2
--R      2log(x) - log(- x )
--R (5) -----
--R      4
--R     2a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 73
logpowminus:=rule(log(-a^n) == n*log(a)+log(-1))
--R
--R      n
--R (6) log(- a ) == n log(a) + log(- 1)
--R
--R                                          Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 74      14:174 Schaums and Axiom differ by a constant
dd:=logpowminus cc
--R
--R      log(- 1)
--R (7) - -----
--R      4
--R     2a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

13 [1]:14.175 $\int \frac{dx}{x^2(a^2 - x^2)^2}$

$$\int \frac{1}{x^2(a^2 - x^2)^2} = -\frac{1}{a^4x} + \frac{x}{2a^4(a^2 - x^2)} + \frac{3}{4a^5} \ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right)$$

```

(*)+=
)clear all

--S 75
aa:=integrate(1/(x^2*(a^2-x^2)^2),x)
--R
--R
--R      3      2      3      2      2      3
--R      (3x  - 3a x)log(x + a) + (- 3x  + 3a x)log(x - a) - 6a x  + 4a
--R (1) -----
--R                                  5 3      7
--R                                 4a x  - 4a x
--R                                     Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 76
bb:=-1/(a^4*x)+x/(2*a^4*(a^2-x^2))+3/(4*a^5)*log((a+x)/(a-x))
--R
--R
--R      3      2      - x - a      2      3
--R      (3x  - 3a x)log(-----) - 6a x  + 4a
--R                          x - a
--R (2) -----
--R                                  5 3      7
--R                                 4a x  - 4a x
--R
--R                                     Type: Expression Integer
--E

--S 77
divlog:=rule(log(a/b) == log(a) - log(b))
--R
--R
--R      a
--R (3) log(-) == - log(b) + log(a)
--R      b
--R
--R                                     Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

--S 78
bb1:=divlog bb
--R
--R
--R      3      2      3      2      2      3
--R      (- 3x  + 3a x)log(x - a) + (3x  - 3a x)log(- x - a) - 6a x  + 4a

```

```

--R (4) -----
--R              5 3    7
--R             4a x  - 4a x
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 79
cc:=aa-bb
--R
--R              - x - a
--R      3log(x + a) - 3log(x - a) - 3log(-----)
--R                                          x - a
--R (5) -----
--R              5
--R             4a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 80
dd:=divlog cc
--R
--R      3log(x + a) - 3log(- x - a)
--R (6) -----
--R              5
--R             4a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 81
logminusb:=rule(b*log(x + a) - b*log(- x - a) == b*log(-1))
--R
--I (7) b log(x + a) - b log(- x - a) + %U == b log(- 1) + %U
--R                                          Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 82      14:175 Schaums and Axiom differ by a constant
ee:=logminusb dd
--R
--R      3log(- 1)
--R (8) -----
--R              5
--R             4a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

14 [1]:14.176 $\int \frac{dx}{x^3(a^2 - x^2)^2}$

$$\int \frac{1}{x^3(a^2 - x^2)^2} = \frac{1}{2a^4x^2} + \frac{1}{2a^4(a^2 - x^2)} + \frac{1}{a^6} \ln\left(\frac{x^2}{a^2 - x^2}\right)$$

```

(*)+=
)clear all

--S 83
aa:=integrate(1/(x^3*(a^2-x^2)^2),x)
--R
--R
--R
--R      4      2 2      2      2      4      2 2      2 2      4
--R      (- 2x  + 2a x )log(x  - a ) + (4x  - 4a x )log(x) - 2a x  + a
--R (1) -----
--R                                  6 4      8 2
--R                               2a x  - 2a x
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 84
bb:=-1/(2*a^4*x^2)+1/(2*a^4*(a^2-x^2))+1/a^6*log(x^2/(a^2-x^2))
--R
--R
--R
--R      4      2 2      2      2      2      2 2      4
--R      (2x  - 2a x )log(- ----) - 2a x  + a
--R                        2      2
--R                       x  - a
--R (2) -----
--R                        6 4      8 2
--R                       2a x  - 2a x
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 85
divlog:=rule(log(a/b) == log(a) - log(b))
--R
--R
--R      a
--R (3) log(-) == - log(b) + log(a)
--R      b
--R                                          Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

--S 86
bb1:=divlog bb

```

```

--R
--R
--R      4      2 2      2      2      4      2 2      2      2 2      4
--R      (- 2x  + 2a x )log(x  - a ) + (2x  - 2a x )log(- x ) - 2a x  + a
--R (4) -----
--R
--R      6 4      8 2
--R      2a x  - 2a x
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 87
cc:=aa-bb1
--R
--R
--R      2
--R      2log(x) - log(- x )
--R (5) -----
--R
--R      6
--R      a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 88
logpowminus:=rule(log(-a^n) == n*log(a)+log(-1))
--R
--R
--R      n
--R (6) log(- a ) == n log(a) + log(- 1)
--R
--R                                          Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 89      14:176 Schaums and Axiom differ by a constant
dd:=logpowminus cc
--R
--R
--R      log(- 1)
--R (7) - -----
--R
--R      6
--R      a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

15 [1]:14.177 $\int \frac{dx}{(a^2 - x^2)^n}$

$$\int \frac{1}{(a^2 - x^2)^n} = \frac{x}{2(n-1)a^2(a^2 - x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{(2n-2)a^2} \int \frac{1}{(a^2 - x^2)^{n-1}}$$

<*)+=

)clear all

--S 90 14:177 Axiom cannot do this integration

aa:=integrate(1/((a^2-x^2)^n),x)

--R

--R

--R

--R

--I

--R

--I

--R

--E

$$(1) \quad \int \frac{x}{(a^2 - x^2)^n} dx$$

Type: Union(Expression Integer,...)

16 [1]:14.178 $\int \frac{x dx}{(a^2 - x^2)^n}$

$$\int \frac{x}{(a^2 - x^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)(a^2 - x^2)^{n-1}}$$

```
(*)+=
)clear all
```

```
--S 91
aa:=integrate(x/((a^2-x^2)^n),x)
```

```
--R
--R
--R          2      2
--R         - x  + a
--R (1) -----
--R                    2      2
--R                 n log(- x  + a )
--R (2n - 2)%e
```

Type: Union(Expression Integer,...)

```
--E
```

```
--S 92
bb:=1/(2*(n-1)*(a^2-x^2)^(n-1))
```

```
--R
--R
--R          1
--R (2) -----
--R          2      2 n - 1
--R (2n - 2)(- x  + a )
```

Type: Expression Integer

```
--E
```

```
--S 93
cc:=aa-bb
```

```
--R
--R
--R          2      2
--R         n log(- x  + a )
--R - %e
--R          2      2      2      2 n - 1
--R        + (- x  + a )(- x  + a )
--R (3) -----
--R                    2      2
--R          2      2 n - 1 n log(- x  + a )
--R (2n - 2)(- x  + a ) %e
```

Type: Expression Integer

```
--E
```

```
--S 94
```

```

explog:=rule(%e^(n*log(x)) == x^n)
--R
--R      n log(x)      n
--R (4) %e      == x
--R                                     Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 95
dd:=explog cc
--R
--R      2      2 n      2      2      2      2 n - 1
--R - (- x + a ) + (- x + a )(- x + a )
--R (5) -----
--R      2      2 n - 1      2      2 n
--R (2n - 2)(- x + a ) (- x + a )
--R
--R                                     Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 96      14:178 Schaums and Axiom agree
ee:=complexNormalize dd
--R
--R (6) 0
--R
--R                                     Type: Expression Integer
--E

```

17 [1]:14.179 $\int \frac{dx}{x(a^2 - x^2)^n}$

$$\int \frac{1}{x(a^2 - x^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)a^2(a^2 - x^2)^{n-1}} + \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{x(a^2 - x^2)^{n-1}}$$

```

(*)+≡
)clear all

```

```

--S 97      14:179 Axiom cannot integrate this expression
aa:=integrate(1/(x*(a^2-x^2)^n),x)
--R
--R
--R      x
--R ++      1
--R (1) | ----- d%L
--R ++      2      2 n
--R %L (a - %L )
--R
--R                                     Type: Union(Expression Integer,...)
--E

```

18 [1]:14.180 $\int \frac{x^m dx}{(a^2 - x^2)^n}$

$$\int \frac{x^m}{(a^2 - x^2)^n} = a^2 \int \frac{x^{m-2}}{(a^2 - x^2)^n} - \int \frac{x^{m-2}}{(a^2 - x^2)^{n-1}}$$

<*)+≡
)clear all

--S 98 14:180 Axiom cannot integrate this expression

aa:=integrate(x^m/((a^2-x^2)^n),x)

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--E

$$(1) \quad \int \frac{x^m}{(a^2 - x^2)^n} dx$$

Type: Union(Expression Integer,...)

19 [1]:14.181 $\int \frac{dx}{x^m(a^2 - x^2)^n}$

$$\int \frac{1}{x^m(a^2 - x^2)^n} = \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{x^m(a^2 - x^2)^{n-1}} + \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{x^{m-2}(a^2 - x^2)^n}$$

<*)+≡
)clear all

--S 99 14:181 Axiom cannot integrate this expression

aa:=integrate(1/(x^m*(a^2-x^2)^n),x)

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--R

--E

$$(1) \quad \int \frac{1}{x^m(a^2 - x^2)^n} dx$$

Type: Union(Expression Integer,...)

)spool
)lisp (bye)

References

- [1] Spiegel, Murray R. *Mathematical Handbook of Formulas and Tables*
Schaum's Outline Series McGraw-Hill 1968 p66